Министерство образования и науки Российской Федерации

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса

Н.Н. ОДИЯКО
Н.Ю. ГОЛОДНАЯ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

Рекомендовано Дальневосточным региональным учебно-методическим центром (ДВ РУМЦ) в качестве учебного пособия для студентов направления 080700.62 «Бизнес-информатика» и специальности 080116.65 «Математические методы в экономике» вузов региона

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2010

ŋqdbɐeʎ bɆ dədɆbʎзe b ɛɔɑбɔɐ Ɉqdbʎqɐè

ББК 22.171
О 42

Рецензенты: А.Ю. Чеботарев, д-р физ.-мат. наук, зав. каф. математической физики и компьютерного моделирования ИМКН ДВГУ;
В.Н. Гемба, канд. экон. наук, доцент каф. математики и моделирования ТГЭУ

Одияко, Н.Н., Голодная, Н.Ю.
О 42 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ [Текст] : учебное пособие. – Владивосток : Изд-во ВГУЭС, 2010. – 232 с.

ISBN

Учебное пособие разработано в соответствии с программой курса, а также требованиями образовательного стандарта России. Излагаются основы теории вероятностей. Основные понятия иллюстрируются различными примерами экономического содержания. Содержит достаточно большое количество решённых задач, задачи для самостоятельного решения и по 30 вариантов индивидуальных заданий по различным разделам дисциплины.

Предназначено студентам специальностей 080116.65 «Математические методы в экономике» и 080700.62 «Бизнес-информатика».

ББК 22.171

ISBN

ŋqdqyeY bE dedEbYse d eacdcy Jqdqyqyè

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие достаточно полно освещает основные положения теории вероятностей в соответствии с программой дисциплины «Теория вероятностей» и Государственного стандарта по специальности «Математические методы в экономике». Оно может быть использовано при изучении раздела «Теория вероятностей» дисциплины «Высшая математика» студентами всех специальностей вуза. Поэтому большинство примеров и задач имеют социально-экономическую направленность. С этой же целью в пособии излагается материал, показывающий связь теории вероятностей и математической статистики с конкретными экономическими приложениями.

Изложение ведется от частного к общему, от простого к сложному. Это создает возможности для ведения индивидуального преподавания, позволяет использовать основной материал для разных экономических специальностей, а более сложный – для студентов специальности «Математические методы в экономике». Каждый преподаватель, основываясь на программе конкретной специальности, определяет, какой материал следует давать более подробно, а какой – менее подробно или вообще опустить, рекомендовать к самостоятельному изучению.

Пособие включает в себя основы теории вероятностей: случайные события и их вероятности; случайные величины, их распределения и числовые характеристики; важнейшие предельные теоремы теории вероятностей; введение в теорию случайных процессов.

Теория вероятностей изучает свойства массовых случайных событий, способных многократно повторяться при воспроизведении определенного комплекса условий. Основное свойство любого случайного события, независимо от его природы, – мера или вероятность его осуществления.

Теория вероятностей – математическая наука. Из первоначально заданной системы аксиом вытекают другие ее положения и теоремы. Впервые законченную систему аксиом сформулировал в 1936 г. советский математик академик А.Н. Колмогоров в своей книге «Основные понятия теории вероятностей».

Теория вероятностей вначале развивалась как прикладная дисциплина. В связи с этим ее понятия и выводы имели окраску тех областей знаний, в которых были получены. Лишь постепенно выкристаллизовалось то общее, что присуще вероятностным схемам, независимо от области их приложения: массовые случайные события, действия над ними и их вероятности, случайные величины и их числовые характеристики. Большой вклад в развитие теории вероятностей внесли русские и советские ученые.

Приложения способствовали зарождению теории вероятностей, они же питают ее развитие как науки, приводя; к появлению все новых ее ветвей и разделов. На теорию вероятностей опирается математическая статистика, задача которой состоит в том, чтобы по ограниченным данным (выборке) восстановить с определенной степенью достоверности характеристики, присущие генеральной совокупности, т.е. всему мыслимому набору данных, описывающему изучаемое явление. За несколько последних десятилетий от теории вероятностей «отпочковались» такие отрасли науки, как теория случайных процессов, теория массового обслуживания, теория информации, эконометрическое моделирование и др. Этот процесс продолжается и теперь.

Одной из важнейших сфер приложения теории вероятностей является экономика. В настоящее время трудно себе представить исследование и прогнозирование экономических явлений без использования эконометрического моделирования, регрессионного анализа, трендовых и сглаживающей моделей и других методов, опирающихся на теорию вероятностей.

С развитием общества народное хозяйство все более усложняется; следовательно, по законам развития динамических систем должен усиливаться статистический характер законов, описывающих социально-экономические явления.

Все это предопределяет необходимость овладения методами теории вероятностей как инструментом статистического анализа и прогнозирования экономических явлений и процессов.

Тема 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. Основные понятия комбинаторики

Для успешного решения задач с использованием классического определения вероятности необходимо знать основные правила и формулы комбинаторики.

Комбинаторикой называют раздел математики, в котором изучаются задачи следующего типа: сколько комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из элементов данного множества.

1.1.1. Правила суммы и произведения

Пусть множество $A=\{a_1,..., a_n\}$ состоит из m элементов, а множество $B=\{b_1,..., b_n\}$ – из n элементов. Рассмотрим множество, состоящее из всевозможных упорядоченных пар (a, b), где элемент a принадлежит множеству A, а элемент b принадлежит множеству B (такое множество называется декартовым произведением множеств A и B и обозначается $A \times B$).

Правило произведения. Множество $A\times B$ содержит $m\cdot n$ элементов.

Вообще, множество $A_1\times A_2\times\ldots\times A_p$ состоит из $n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_p$ элементов, где n_1 – число элементов в A_1, n_2 – в A_2 и т.д.

Для решения задач комбинаторики удобна следующая формулировка правила произведения.

Пусть объект a_1 можно выбрать n_1 различными способами, после каждого выбора объекта a_1 объект a_2 можно выбрать n_2 различными способами, …, после каждого выбора объектов $a_1, a_2,...,a_{p-1}$ объект a_p можно выбрать n_p различными способами. Тогда количество способов, которыми можно выбрать $a_1, a_2,...,a_p$, равно $n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_p$.

Пример. Сколько четырехбуквенных слов можно составить из карточек «в», «е», «ч», «н», «о», «с», «т», «ь»?

Решение. Пусть a_k – k-я буква слова $(k=1,2,3,4)$. Тогда $n_1=8$, $n_2=7$, $n_3=6$, $n_4=5$ и по правилу произведения сразу получим ответ: $8\cdot7\cdot6\cdot5=1680$.

Пример. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладью так, чтобы они не били друг друга?

Решение. Выбор объекта a_1 – поля для белой ладьи – может быть сделан $n_1 = 64$ способами. Независимо от выбора этого поля белая ладья бьет 15 полей, поэтому для черной ладьи остается 64 – 15 = 49 полей: $n_2 = 49$.

Пример. Сколько существует четырехзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

Решение. Все четырехзначные числа, а их 9999 – 999 = 9000, делятся на две группы: те, в записи которых все цифры нечетные, и те, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра.

Всего нечетных цифр – пять, поэтому выбор k-й цифры числа может быть сделан $n_k = 5$ способами $(k = 1,2,3,4)$, а количество четырехзначных чисел, у которых все цифры нечетные, равно $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

Следовательно, количество чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра, равно 9000 – 625 = 8375.

Замечание. Обратите внимание на идею, которую мы использовали – переход к дополнению изучаемого множества. Это пример применения второго общего правила комбинаторики – правила суммы.

Правило суммы. Если объект a можно выбрать m различными способами, а объект b можно выбрать n различными способами, причем результаты выборов объектов a и b никогда не совпадают, то выбор «либо a, либо b» можно осуществить $m + n$ различными способами.

Часто в задачах приходится применять сразу оба правила комбинаторики.

Пример. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «комбинаторика»?

Решение. В слове «комбинаторика» 13 букв и если бы все они были различными, то, переставляя их, можно было бы получить $13!$ слов. Но в нашем случае буквы «*к, о, и, а*» встречаются по два раза. Обозначим их через $к_1, к_2, o_1, o_2, и_1, и_2, a_1, a_2$. Ясно, что слова, отличающиеся друг от друга перестановкой букв $к_1$ и $к_2$ одинаковые, так что $13!$ разбиваются на пары одинаковых слов. Каждая такая группа из $13!/2$ слов тоже разбивается на пары одинаковых с точки зрения буквы o слов и т.д.

Следовательно, различных слов, переставляя буквы слова «комбинаторика», можно получить

$$\frac{13!}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{13!}{16}.$$

1.1.2. Упорядоченные и неупорядоченные последовательности

Если из множества, содержащего n элементов, каким-то способом выбирают k элементов $(k \le n)$, то говорят, что из этого множества произведена выборка объема k (все элементы множества считаются различными).

Определение. Всякая упорядоченная выборка объема k из множества, состоящего из n элементов, называется размещением из n элементов по k элементов и обозначается через A_n^k.

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1),\ \text{где}\ 1 \le k \le n.$$

Определение. Размещение из n элементов по n называется перестановкой из n элементов и обозначается P_n.

$$P_n = n!,\ 0! = 1.$$

Определение. Всякая неупорядоченная выборка объекта k из множества, состоящего из n элементов $(k \le n)$, называется сочетанием из n элементов по k элементов и обозначается через C_n^k.

$$C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пример. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

Решение. Вратаря можно выбрать $C_2^1 = 2$ способами, защитников – $C_7^2 = \dfrac{7\cdot 6}{2} = 21$ способом, нападающих – $C_{10}^3 = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} = 120$ способами. Всего, по правилу произведения, существует $2\cdot 21\cdot 120 = 5040$ способов выбора стартовой шестерки.

С точки зрения теории множеств C_n^k – это число всех подмножеств из k элементов, которые можно выбрать из множества, состоящего из n элементов. Поэтому равенство $C_n^0 = 1$ означает, что всякое пустое подмножество только одно; $C_n^1 = n$ – что число одноэлементных подмножеств равно n и т.д.

Этот взгляд на числа C_n^k позволяет найти комбинаторный смысл следующих арифметических свойств чисел C_n^k:

$$а)\ C_n^k = C_n^{n-k}, \text{ если } 0 \le k \le n;$$

$$б)\ C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k, \text{ если } 0 \le k \le n-1;$$

$$в)\ C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Все числа C_n^k можно расположить на плоскости в виде бесконечной таблицы, которая называется треугольником Паскаля:

$$C_0^0 = 1$$

$$C_1^0 = 1 \qquad C_1^1 = 1$$

$$C_2^0 = 1 \qquad C_2^1 = 2 \qquad C_2^2 = 1$$

$$C_3^0 = 1 \qquad C_3^1 = 3 \qquad C_3^2 = 3 \qquad C_3^3 = 1$$

…

В этой таблице в строке с номером n $(n = 0,1,\ldots)$ каждое число (кроме двух крайних) равно сумме двух «соседних» с ним чисел строки с номером $n-1$.

Справедлива следующая формула:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n,$$

которая называется биномом Ньютона.

1.2. Случайные события и предмет теории вероятностей

На практике встречаются такие ситуации, когда исход проводимого опыта нельзя предсказать заранее, например, какая сторона выпадет при бросании монеты, факторы, влияющие на исход опыта – начальное положение монеты, начальная скорость, сопротивление воздуха и так далее. В таких ситуациях мы считаем результат опыта зависящим от случая, то есть рассматриваем его как случайное событие.

Определение. Под опытом G понимается воспроизведение какого-либо комплекса условий для наблюдения исследуемого явления (события). Обычно считается, что явление (событие) случайно в опыте G, если при неоднократном воспроизведении этого опыта оно иногда происходит, а иногда – нет, причем однозначно предсказать возможный исход (событие) этого опыта заранее нельзя.

Определение. Событие называется случайным по отношению к данному опыту, если при осуществлении этого опыта оно может наступить или не наступить.

События обозначаются: $A, B, C...$

Замечание. Из определения следует, что событие считается случайным, если его наступление в результате опыта представляет собой лишь одну из возможностей.

Нас интересуют только те опыты, которые можно повторять неограниченное число раз. Любое случайное событие, наступление которого возможно в такого рода опытах, называется массовым или статистическим.

Определение. Теория вероятностей занимается изучением закономерностей, присущих массовым случайным событиям.

1.2.1. Пространство элементарных событий

Определение. Возможные исходы ω опыта G называются элементарными событиями, если они являются взаимно исключающими, и в результате опыта одно из них происходит обязательно.

Определение. Совокупность Ω всех элементарных событий в опыте G называется пространством элементарных событий.

Определение. Пусть фиксирована некоторая непустая совокупность подмножеств S множества Ω. Эти подмножества назовем событиями, если они удовлетворяют следующим требованиям:

– если подмножества $A_1,...,A_n$ суть события, то их объединение тоже является событием: $A_i \in S \Rightarrow \bigcup A_i \in S$,

– если подмножество A является событием, то его дополнение (до Ω) тоже является событием: $A \in S \Rightarrow \overline{A} \in S$.

Из этих требований следует, что Ω – событие.

Определение. Событие называется невозможным в опыте G, если при повторении опыта оно никогда не происходит. Ему соответствует пустое подмножество в Ω, которое обозначается $\varnothing$.

Определение. Событие называется достоверным в опыте G, если при повторении опыта оно происходит всегда. Ему соответствует само пространство Ω.

Определение. Говорят, что в опыте G событие A влечет за собой появление события B, если из осуществления события A следует наступление события B $(A \subset B)$.

1.2.2. Алгебра событий

Определение. События A и B называются равными: $A = B$, если $A \subset B, B \subset A$.

Определение. Суммой событий A и B называется событие $A + B$, состоящее в том, что в опыте произойдет хотя бы одно из этих событий.

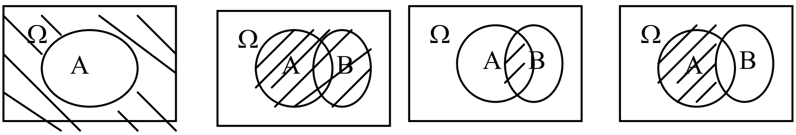
Определение. Произведением событий A и B называется событие AB, состоящее в одновременном появлении этих событий.

Определение. Разностью событий A и B называется событие $A \setminus B$, состоящее в том, что событие A произойдет, а событие B нет.

Определение. Событие $\overline{A}$ называется противоположным событию A, если оно считается наступившим тогда и только тогда, когда A не наступает.

$\overline{A} = \Omega \setminus A$, $\overline{A}$ дополняет A до Ω и $\overline{A} + A = \Omega$.

Графически соотношения демонстрируют диаграммы Венна:



$\overline{A}$ $\quad$ $A + B$ $\quad$ AB $\quad$ $A \setminus B$

Определение. События A и B называются несовместными, если они не могут произойти одновременно в опыте, то есть $AB = \varnothing$.

Замечание. Все законы алгебры высказываний будут верны и для событий, например: $A = AB + A\overline{B}$, $\overline{\sum A_i} = \prod \overline{A_i}$, $\overline{\prod A_i} = \sum \overline{A_i}$.

1.3. Вероятность события

1.3.1. Частотное определение вероятности и его свойства

Определение. Пусть при n-кратном повторении опыта G событие A произошло k_A раз. Частотой $W_n(A)$ события A называется отношение

$$W_n(A) = \frac{k_A}{n}.$$