МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОТДЕЛЬНЫМ ГЛАВАМ МАТЕМАТИКИ

Составители:
Т. Э. Кукарникова,
Л. Б. Краснова

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2010

Содержание

<u>Решение:</u> Можно купить либо по экземпляру каждого романа, либо том, содержащий два романа и экземпляр третьего романа. По правилам суммы и произведения получаем: 6 × 3 × 4 + 5 × 4 + 7 × 6 = 134 способа.

Задания.

1. На вершину горы ведут 5 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее? То же самое при условии, что спуск и подъем происходят по разным путям.

2. Сколькими способами можно указать на шахматной доске два квадрата – черный и белый? А если нет ограничений на цвет выбранных квадратов?

3. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и черный квадраты, не лежащие на одной и той же горизонтали и вертикали?

4. Из 3 экземпляров учебника по криминалистике, 7 экземпляров учебника по уголовному праву и 5 экземпляров учебника по гражданскому процессу надо выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Сколькими способами это можно сделать?

1.2. Выборки элементов

1. ***Размещениями*** из n элементов по m называются такие выборки, которые, имея по m элементов, выбранных из числа данных n элементов, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения (A_n^m).

$$A_n^m = n*(n-1)*(n-2)*...*(n-m+1)$$

или

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Замечание! Обозначение n! (читается «n-факториал») обозначает произведение всех натуральных чисел от 1 до n, т.е. n! = 1 * 2 *...* (n – 1) * n.

1!=1, 2!=2, 3!=6, 4!=24, 5!=120.

Считается, что 0!=1. Данное равенство обеспечивает верность формул, содержащих факториалы, для крайних случаев, когда одно из чисел под факториалом равно 0.

2. Размещения, которые отличаются только порядком расположения элементов, но не самими элементами, называются ***перестановками*** (P_n).

$$P_n = A_n^n = n!$$

3. Выборки из n элементов по m, которые отличаются одна от другой лишь составом элементов, называются ***сочетаниями*** (C_n^m).

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!*m!}$$

Примеры.

<u>Задача 3</u>. По Конституции, флаг страны состоит из трех одинаковых горизонтальных полос трех различных цветов, причем на флаге могут быть только белый, красный, желтый, зеленый, голубой и черный цвета. Сколько разных флагов разрешает такая Конституция?

<u>Решение:</u> Мы имеем дело с выбором 3 из 6. Выбор происходит без повторений (цвета должны быть различны) и с учетом порядка (важно, какой цвет вверху, какой внизу и какой в середине). Согласно формуле числа размещений ответом будет число $A_6^3 = 6*5*4 = 120$.

<u>Задача 4</u>. Один профессор юридического факультета написал 6 книг, другой – 8. Каждый из хочет подарить другому 3 свои книги с автографом. Сколькими способами они могут обменяться подарками?

<u>Решение:</u> Первый профессор может выбрать для подарка 3 книги из своих 6, а это можно сделать C_6^3 = 20 способами. Второй профессор может выбрать для подарка 3 книги из своих 8, уже C_8^3 = 56 способами. Оба выбора происходят независимо и однозначно определяют способ обмена, поэтому варианты нужно перемножать. Ответ: $C_6^3 \times C_8^3 = 56 \times 20 = 1120$ способов.

<u>Задача 5</u>. Сколькими способами можно выставить по кругу красный, коричневый, зеленый, голубой и звездно-полосатый флаги? (расстановки, отличающиеся поворотом круга, считаются одинаковыми).

<u>Решение:</u> Возьмем еще 5 флагов тех же цветов и будем выставлять в ряд: первый в ряду всегда будет звездно-полосатый, а следующие 4 идут в том же порядке, в каком 4 флага в круге следуют по часовой стрелке после звездно-полосатого. Например, расстановке (Кр)–(Зел)–(Гол)–(Зв-пол)–(Кор)–(Кр) (изображен порядок флагов по кругу по часовой стрелке) будет соответствовать ряд (Зв-пол)–(Кор)–(Кр)–(Зел)–(Гол). Понятно, что любой расстановке по кругу соответствует какой-то ряд, и любому ряду, начинающемуся со звездно-полосатого флага, соответствует какая-то расстановка по кругу (просто надо поставить звездно-полосатый флаг и вслед за ним по кругу, по часовой стрелке, выставить остальные 4 флага в том же порядке, в каком они были в ряду). Значит, расстановок флагов по кругу ровно столько же, сколько расстановок в ряд, начинающихся со звездно-полосатого флага. Этих расстановок будет ровно 4! = 24, так как реально мы расставляем только 4 флага (а звездно-полосатый всегда будет на первом месте). Ответ: 24 способа.

Это рассуждение можно сильно упростить: всего есть 5! расстановок флагов (или вдоль ряда, или вдоль круга), но они объединяются в группы по 5 штук, переходящих друг в друга при повороте круга (проверьте, что поворотов, переводящих расстановку в расстановку, ровно пять!). Поэтому в ответе будет 5!/5 = 4! = 24 способа.

Замечание! **n предметов по кругу** можно выставить ровно **(n – 1)!** способами. Но это верно *только если* расстановки, *отличающиеся поворотом круга*, считаются *одинаковыми*.

Задания.

1. Студенты одной группы должны сдать 5 экзаменов в течение восемнадцати дней. Сколькими способами можно составить расписание экзаменов, если в один день разрешается сдавать не более одного экзамена?

2. Сколько разных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, при условии, что ни одна цифра не повторяется?

3. Одна из воюющих сторон захватила в плен 12 солдат, а вторая – 14. Сколькими способами можно обменять 5 военнопленных?

4. На состязании по стрельбе каждый из пяти стрелков старается поразить каждую из девяти мишеней. Сколько возможно различных исходов такого состязания?

5. В компьютерный класс свободного доступа куплены 3 новых системных блока. В классе также есть свободные 4 клавиатуры, 5 «мышек» и 6 мониторов (все клавиатуры, «мышки» и мониторы отличаются друг от друга). Сколькими способами можно укомплектовать все три компьютера (к каждому подключают одну клавиатуру, одну «мышку» и один монитор)?

6. Пин-код моей телефонной карточки состоит из пяти букв (всего в алфавите используется 24 буквы) и шести цифр (используются все 10 цифр). Интересно, сколько таких карточек можно закодировать подобным образом, чтобы никакие две карточки не имели одинаковой кодировки?

7. В переговорах участвуют представители n стран по 8 представителей от каждой страны. Сколькими способами можно их разместить для фотографирования в один ряд так, чтобы рядом с каждым был представитель той же страны?

1.3. Выборки элементов с повторениями

1. Размещения с повторениями: $\overline{A}_n^m = n^m$

2. Перестановки с повторениями: $P_{n_1 n_2 \cdots n_k} = \dfrac{n!}{n_1!*n_2!*\cdots n_k!}$

3. Сочетания с повторениями: $\overline{C}_n^m = \dfrac{(m+n-1)!}{(n-1)!*m!}$

Примеры.

Задача 6. Сколько шестизначных номеров можно составить из десяти цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

Решение. Так как играет роль порядок расположения элементов, но каждый из них может встретиться несколько раз, то число номеров равно размещению с повторениями из десяти цифр по шесть. Ответ: $\overline{A}_{10}^6 = 10^6$.

Задача 7. Сколькими способами можно разложить 28 различных предметов по четырем различным ящикам, так, чтобы в каждом ящике оказалось по 7 предметов?