С. В. Буцык

Математика
для студентов-гуманитариев

Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Челябинская государственная академия культуры и искусств»
Кафедра информатики

С. В. Буцык

МАТЕМАТИКА
для студентов-гуманитариев

Допущено Учебно-методическим объединением вузов
Российской Федерации по образованию в области
историко-архивоведения в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям
033000 «Культурология»
и 034700 «Документоведение и архивоведение»

Челябинск
2011

ŋqdqɐəɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɐ Ɉqdd Ɏqɐè

УДК 51
ББК 22.1я73 + 74.58
Б94

Утверждено на заседании кафедры информатики 29.03.2011, протокол № 7

Буцык, С. В. Математика для студентов-гуманитариев: учеб. пособие / С. В. Буцык; Челяб. гос. акад. культуры и искусств. – Челябинск, 2011. – 92 с.
ISBN 978-5-94839-294-3

Пособие раскрывает содержание и особенности курса математики для студентов-гуманитариев. В качестве базового материала рассматриваются теоретические основы и практические задания по следующим четырем темам: множества и операции над ними; высказывания и операции над ними; элементы теории вероятностей; элементы математической статистики. Кроме того, предложена дополнительная тематика и методический материал для преподавателей.

Структура и содержание соответствуют федеральным государственным образовательным стандартам высшего профессионального образования по группе направлений подготовки бакалавров 030000 «Гуманитарные науки». Издание адресовано студентам, обучающимся по указанным направлениям, а также преподавателям математики.

Рецензенты:
В. Н. Худяков, д-р пед. наук, проф. кафедры информатики Челябинской государственной академии культуры и искусств;
Т. Ю. Винтиш, канд. пед. наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики Челябинского государственного педагогического университета

Учебное издание

Сергей Владимирович Буцык

МАТЕМАТИКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ГУМАНИТАРИЕВ
Учебно-методическое пособие

Редактор В. А. Макарычева

Сдано в РИО 24.02.2011. Подписано к печати
Формат 60x84/16. Объем 5,3 п. л. Тираж 500 экз. Заказ № 1186

Отпечатано в типографии ЧГАКИ. Ризограф
454091, Челябинск, ул. Орджоникидзе 36а

ISBN 978-5-94839-294-3

© Буцык С. В., 2011
© Челябинская государственная академия культуры и искусств, 2011

ŋqdqɐəɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɐ Ɉqdd Ɏqɐè

ŋqqdyeY bE deqEbYse d easqcy Jqqdyqyè

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

БАЗОВЫЙ МАТЕРИАЛ 7

Тема 1. Множества и операции над ними

Теоретическая часть 8

Практическая часть 16

Тема 2. Высказывания и операции над ними

Теоретическая часть 19

Практическая часть 24

Тема 3. Элементы теории вероятностей

Теоретическая часть 27

Практическая часть 34

Тема 4. Элементы математической статистики

Теоретическая часть 39

Практическая часть 43

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ 46

Тема Д 1. Системы счисления и делимость в числовых множествах

Теоретическая часть 47

Практическая часть 52

Тема Д 2. Соответствия, отображения, функции

Теоретическая часть 54

Практическая часть 62

Тема Д 3. Элементы теории вероятностей

Теоретическая часть 65

Практическая часть 68

МАТЕРИАЛ ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ 70

Основной курс 71

Расширенный курс 80

Ответы к заданиям 83

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА 92

ŋqqdyeY bE deqEbYse d easqcy Jqqdyqyè

ВВЕДЕНИЕ

Процесс реформирования российского образования вносит существенные изменения в подготовку студентов высших учебных заведений, что требует обновления методик, пересмотра подходов к преподаванию даже по таким традиционным предметам, как математика.

Федеральными государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования по направлениям подготовки 033000 «Культурология», 034700 «Документоведение и архивоведение» и т. п. рекомендуется изучение математики в рамках математического, естественно-научного (и программно-информационного) цикла дисциплин.

В результате изучения первой части предложенного материала студенты должны знать основные понятия теории множеств, элементы теории вероятности, математической статистики; уметь решать практические задачи методами математического анализа; владеть базовыми знаниями в области математики и т. п.

В требованиях к результатам освоения основных образовательных программ бакалавриата указывается, что выпускник должен обладать, в частности, **следующими компетенциями**:

- владеть культурой мышления, воспринимать, обобщать, анализировать информацию, ставить цель и выбирать пути ее достижения;
- логически верно, ясно и аргументировано выражать мысли в устной и письменной форме;
- использовать основные законы естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

К особенностям стандартов третьего поколения по гуманитарным направлениям подготовки применительно к изучению математики можно отнести:

а) незначительную трудоемкость базовой части указанного цикла дисциплин (в пределах 10–20 зачетных единиц при 5–6 рекомендуемых дисциплинах);

б) наличие в перечне для разработки примерных учебных программ и пособий наряду с математикой таких дисциплин, как

информатика, информационные технологии, программные средства обработки информации и т. п.

Данный набор находит отражение и в компетенциях выпускника-гуманитария: владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации, иметь навыки работы с компьютером как средством управления информацией; работать с информацией в глобальных компьютерных сетях.

Следует заметить, что во многих стандартах предыдущего второго поколения (2000–2002 гг.) по укрупненной группе специальностей «Гуманитарные науки» математика и вовсе рассматривалась не как отдельный предмет, а в рамках единой дисциплины «Математика и информатика».

Таким образом, при разработке данного пособия мы поставили **следующие задачи**:

- оптимизировать содержание и трудоемкость дисциплины для выполнения обязательных требований стандартов;
- обеспечить возможность рационального расширения тематики курса;
- способствовать межпредметным связям между математикой, информатикой и информационными технологиями.

Темы в учебно-методическом пособии распределены на базовые и дополнительные, а также в издание включены материалы для преподавателя.

Базовый материал составлен из следующих четырех тем:

1. Множества и операции над ними: основные понятия; задание и равенство множеств; подмножества и диаграммы; операции над множествами; числовые множества; задание и изображение числовых множеств.

2. Высказывания и операции над ними: основные понятия; операции над высказываниями; составление таблиц истинности; доказательство равенства и тавтологии.

3. Элементы теории вероятностей: случайные события; формулы и правила комбинаторики; решение комбинаторных задач; случайные величины; числовые характеристики случайных величин.

4. Элементы математической статистики: основные понятия; первичная обработка выборки; наглядное изображение выборки; точечные оценки числовых параметров распределения.

Дополнительный материал пособия составляют следующие три темы:

Д 1. Системы счисления и делимость в числовых множествах: системы счисления в множестве натуральных чисел; правила перевода натуральных чисел; делимость целых неотрицательных чисел; правило нахождения НОД и НОК двух чисел.

Д 2. Соответствия, отображения, функции: бинарные соответствия; отображения; числовые функции; основные виды числовых функций; основные способы построения графиков функций.

Д 3. Элементы теории вероятностей: Сумма и произведение случайных событий. Условная вероятность. Ковариация случайных величин. Коэффициент корреляции.

Каждая из вышеуказанных тем разделена на теоретическую и практическую части, где представлены примеры решения задач и задания для самостоятельного решения.

Материал для преподавателя содержит рекомендации по построению дисциплины на основе базового материала пособия (основной курс), а также с использованием дополнительного материала (расширенный курс). В частности, для обоих курсов приведены:

- рекомендуемая трудоемкость в зачетных единицах;
- формы итогового контроля;
- распределение часов по темам и видам занятий;
- методика организации текущего контроля и др.

Для удобства работы преподавателя даны ответы к заданиям для самостоятельного решения (тем базового материала) и примерных контрольных работ (в рамках основного курса).

Базовый материал

ТЕМА 1.
МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основные понятия

Понятие ***множества*** относится к математическим объектам, для которых нет строгого определения. Определение обычно вводится лишь на интуитивном уровне. Поясним его примерами. Так, можно говорить о множестве гласных букв русского алфавита, о множестве учащихся некоторой школы, о множестве парт в данной аудитории и т. д. В повседневной жизни вместо слова «множество» употребляют слова «набор», «собрание», «коллекция», «стадо», «табун» и т. д.

Объекты любой природы (люди, дома, книги, геометрические фигуры, числа и т. д.), составляющие множество, называют его ***элементами***. Например, студент Иванов является элементом множества студентов I курса, март – элементом множества месяцев в году и т.д.

Отношение между множеством и его элементами обычно выражают при помощи слова «*принадлежит*». Например: цифра 5 принадлежит множеству цифр.

Множества обычно *обозначают* заглавными буквами латинского алфавита (*A, B, C, D*…), а их элементы – малыми (*a, b, c, d*…), слово «принадлежит» заменяют символом «$\in$» и записывают, например: $a \in A$ (объект a принадлежит множеству A) или $a \notin A$ (объект а не принадлежит множеству A). Например, если A – множество российских поэтов, то поэт Пушкин $\in A$, а поэт Шекспир $\notin A$.

Множества могут быть *конечными* или *бесконечными*. Например, множество преподавателей вуза – конечно, а множество точек прямой – бесконечно.

Множество может содержать один или несколько элементов. *Пустым множеством* называют единственное множество, не содержащее ни одного элемента (обозначается символом $\varnothing$). Например, множество людей, побывавших в 2001 году на Луне.

Задание и равенство множеств

Множество считают ***заданным***, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит.

1-й способ задания множеств – перечисление всех элементов множества. Например, множество A, состоящее из объектов, a, b, c, d записывают: $A = \{a; b; c; d\}$. Данный способ применим только для конечных множеств, число элементов которых невелико.

2-й способ задания множеств – формулировка характеристического свойства всех элементов множества (свойства, которым обладают все элементы данного множества и только они). В этом случае в фигурных скобках записывают обозначение произвольного элемента множества, ставят вертикальную черту, а затем характеристическое свойство всех элементов, т. е. $A = \{x \mid$ характеристическое свойство всех элементов $x\}$. Способ применим для задания как конечных, так и бесконечных множеств.

Например, множество цветов радуги K можно записать первым способом: $K = \{$красный; оранжевый; желтый; зеленый; голубой; синий; фиолетовый$\}$ или вторым: $K = \{x \mid x -$ цвет радуги$\}$.

Множества A и B считают ***равными***, если они состоят из одних и тех же элементов (записывают: $A = B$). Например, равны следующие множества: $\{4; 9; 16\}$, $\{16; 4; 9\}$, $\{\sqrt{16}; \sqrt{81}; \sqrt{256}\}$ и $\{2^2; 3^2; 4^2\}$.

Подмножества и диаграммы

Множество B называют ***подмножеством*** множества A тогда и только тогда, когда каждый элемент B принадлежит множеству A (записывается: $B \subset A$). Например, A – множество студентов вуза, B – множество первокурсников этого вуза.

Различают два вида подмножеств множества A: *несобственные* (само A и $\varnothing$) и *собственные* (все остальные подмножества, если они существуют).

Свойство подмножеств: Если $B \subset A$ и $A \subset$ B, то A = B.

Чтобы наглядно изображать множества и отношения между ними, рисуют геометрические фигуры, которые находятся между собой в этих отношениях. Такие изображения множеств называют ***диаграммами*** *(или кругами)* ***Эйлера-Венна***.

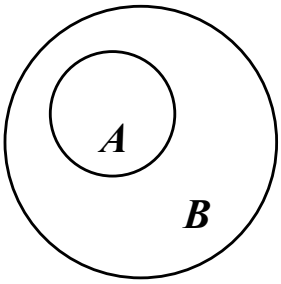

Рис. 1.1

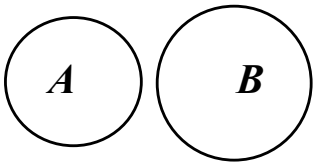

Рис. 1.2

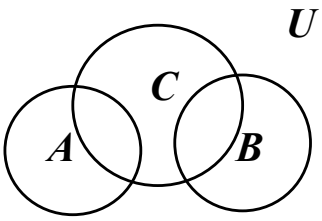

Рис. 1.3

На рисунке 1.1 показаны множества A и B такие, что $A \subset B$, а на рисунке 1.2 – множества A и B, не имеющие общих элементов.

Часто бывает, что рассматриваются только подмножества одного и того же множества. Такое множество называют *универсальным множеством (*обозначают U и изображают на диаграммах в виде прямоугольника).

Например, если A – множество учащихся первого класса школы, B – множество учащихся второго класса школы, а C – множество девочек школы, то U удобно обозначить множество всех учащихся школы (рис. 1.3).

Операции над множествами

Пусть даны два множества: A и B. ***Пересечением*** этих ***множеств*** называют множество, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно множествам A и B (обозначается: $A \cap B$), т. е. $A \cap B = \{x \mid x \in \text{A и } x \in \text{B}\}$.

Например, A = {ручка; карандаш; циркуль; маркер}. B = {фломастер; маркер; ручка; перо}. Тогда $A \cap B$ = {ручка; маркер}.

Если множества A и B не имеют общих элементов, то они *не пересекаются* (записывается $A \cap \text{B} = \varnothing$). Если множества A и B имеют хотя бы один общий элемент, то множества A и B *пересекаются* (записывается $A \cap B \neq \varnothing$).

На диаграммах (кругах) Эйлера-Венна пересечение множеств A и B изображается в виде заштрихованной области (рис. 1.4).

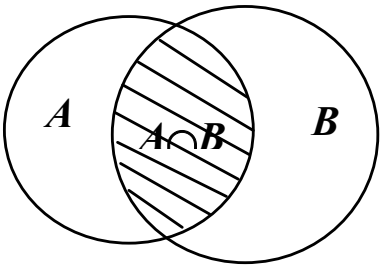

Рис. 1.4

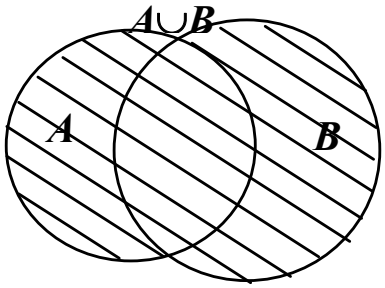

Рис. 1.5

Свойства операции пересечения

1. Коммутативность: для любых множеств A и B верно равенство $A \cap B = B \cap A$.

2. Ассоциативность: для любых множеств A, B, C верно равенство $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

3. *Если* $A \subset B$, *то* $A \cap B = A$. В частности, для любого множества A имеем: $A \cap A = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap U = A$.

Пусть даны два множества: A и B. ***Объединением*** этих ***множеств*** называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств (обозначается: $A \cup B$), т. е. $A \cup B = \{x \mid x \in \text{A или } x \in \text{B}\}$.

Например, A = {ручка; карандаш; циркуль; маркер}. B = {фломастер; маркер; ручка; перо}. Тогда $A \cup B$ = {ручка; карандаш; циркуль; маркер; фломастер; перо}.

На диаграммах (кругах) Эйлера-Венна объединение множеств A и B изображается в виде заштрихованной области (рис. 1.5).

Свойства операции объединения

1. Коммутативность: для любых множеств A и B верно равенство $A \cup B = B \cup A$.

2. Ассоциативность: для любых множеств A, B, C верно равенство $(A \cup B) \cup \text{C} = A \cup (\text{B} \cup C)$.

3. Если $B \subset A$, то $A \cup B = A$. В частности, для любого множества A имеем: $A \cup A = A$; $A \cup \varnothing = A$; $A \cup U = U$.

4. Дистрибутивность: Для любых множеств *A, B* и *C* справедливы равенства:

а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Пусть даны два множества: *A* и *B*. ***Разностью*** данных ***множеств*** называется множество элементов, принадлежащих *A*, но не принадлежащих *B* (обозначают: $A \setminus B$).

Например, A = {ручка; карандаш; циркуль; маркер}. B = {фломастер; маркер; ручка; перо}. Тогда $A \setminus B$ = {карандаш; циркуль}.

На диаграммах (кругах) Эйлера-Венна разность A \ B изображается следующим образом (рис. 1.6).

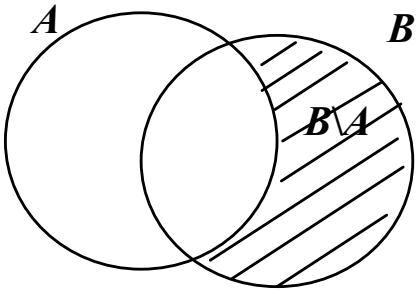

Рис. 1.6

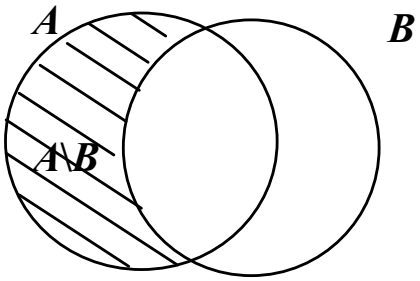

Рис. 1.7

Свойства операции разность

Из определения разности очевидно, что для данной операции не будут справедливы свойства коммутативности и ассоциативности (рис. 1.7). Представленные ниже свойства показывают связь разности с операциями пересечения и объединения:

1. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ для любых множеств *A*, *B* и *C*;
2. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ для любых *A*, *B* и *C*.

В случае когда одно из заданных множеств является подмножеством другого, говорят не о разности, а о дополнении одного множества до другого. Пусть $B \subset A$, тогда множество всех элементов, принадлежащих *A*, но не принадлежащих *B,* называют ***дополнением к подмножеству*** *B в множестве A* (обозначают B'_A).

Например, если A – множество учащихся некоторого класса, B – множество девочек класса, то B'_A – множество мальчиков класса.

На диаграммах (кругах) Эйлера-Венна дополнение B'_A изображается следующим образом (рис. 1.8).

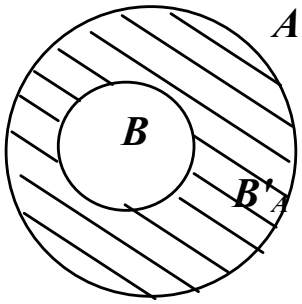

Рис. 1.8

Дополнение к множеству B в универсальном множестве U обозначают без индекса, т. е. B'.

Свойства операции дополнения

Для любых подмножеств A и B универсального множества U имеют место следующие равенства:

1. $(A \cap B)' = A' \cup B'$;
2. $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Числовые множества

На практике особую роль играют ***числовые множества*** – множества, элементами которых являются числа. Рассмотрим некоторые числовые множества, для которых существуют специальные обозначения.

$N = \{1; 2; 3; 4; 5; \ldots\}$ – множество *натуральных* чисел.

$Z = \{\ldots; -3; -2; -1; 0: 1; 2; 3; \ldots\}$ – множество *целых* чисел. Также используют следующие подмножества данного множества целых: $Z_0 = \{0: 1; 2; 3; \ldots\}$ – множество целых неотрицательных чисел и $Z_- = \{\ldots; -3; -2; -1\}$ – множество целых отрицательных чисел. Очевидно, что $Z = Z_0 \cup Z_-$.

$Q = \{m / n \mid m \in Z, n \in Z, n \neq 0\}$ – множество *рациональных* чисел. Важно отметить, что любое рациональное число представимо в виде периодической десятичной дроби, например:

$$\frac{3}{2} = 1{,}5;\ \frac{1}{3} = 0{,}(3);\ \frac{5}{12} = 0{,}41(6)$$ и т. п.

I – множество *иррациональных* чисел, т. е. чисел, которые нельзя представить в виде периодической десятичной дроби, например: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, e, … и т. п.

$R = Q \cup I$ – множество *действительных* чисел.

Приведенные выше множества удобно изобразить на одной диаграмме Эйлера-Венна (рис. 1.9). При этом наглядно видно, что $N \subset Z \subset Q \subset R$. Заметим также, что $I = Q'_R$ (рис. 1.10).

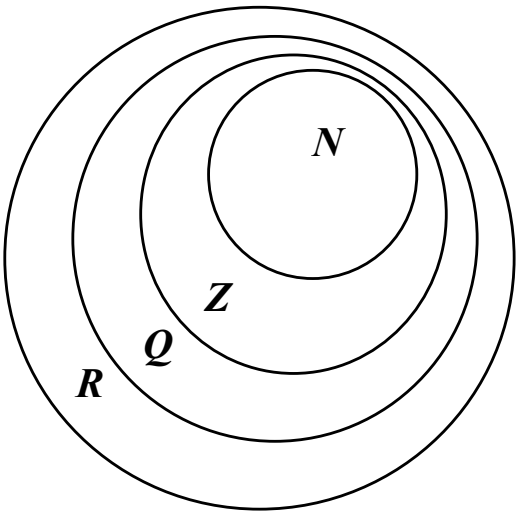

Рис. 1.9

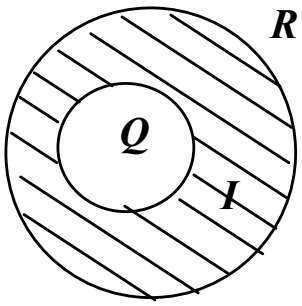

Рис. 1.10

Задание и изображение числовых множеств

Ранее приведенные способы задания множеств, справедливы и для числовых множеств. Например, K – множество натуральных чисел, меньших 7, можно записать 1-м способом: $K = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ или 2-м: $K = \{x \mid x \in N, x < 7\}$.

В тоже время, для наглядного представления числовых множеств и выполнения операций над ними часто удобней использовать вместо диаграмм Эйлера-Венна ***числовую прямую***. На числовой прямой указывается положительное направление, точка начала отсчета и задается единичный отрезок. Также указывается базовое числовое множество (обычно, N, Z, Q, или R), ключевые точки изображаемого множества, производится его штриховка и обозначение.