Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Кафедра радиофизики

А.Н. Кренёв, А.Б. Герасимов

Теория сигналов

Методические указания

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов специальности Радиофизика и электроника
и направления подготовки Телекоммуникации

Ярославль 2006

УДК 621.391
ББК З 811я73
К 79

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2006 года

Рецензент кафедра радиофизики ЯрГУ

К 79 **Кренёв, А.Н., Герасимов, А.Б.** Теория сигналов : методические указания / А.Н. Кренёв, А.Б. Герасимов ; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль : ЯрГУ, 2006. 68 с.

Изложены математические основы описания сигналов с помощью разрывных функций, спектрального анализа периодических и непериодических сигналов, теории радиосигналов. Рассмотрены примеры решения задач.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности 013800 Радиофизика и электроника и направлению подготовки 550400 Телекоммуникации очной и заочной форм обучения (дисциплины "Аналоговые цепи и сигналы", "Введение в теорию сигналов", блок ОПД, ФТД).

Ил. 50. Табл. 1. Библиогр.: 7 назв.

УДК 621.391
ББК З 811я73

Учебное издание

Кренёв Александр Николаевич
Герасимов Александр Борисович

Теория сигналов

Методические указания

Редактор, корректор А.А. Аладьева
Компьютерная верстка И.Н. Ивановой
Подписано в печать 22.06.2006 г. Формат 60х84/16. Бумага тип.
Усл. печ. л. 3,95. Уч.-изд. л. 1,6. Тираж 300 экз. Заказ
Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.
Отпечатано на ризографе.
Ярославский государственный университет.
150000 Ярославль, ул. Советская, 14.

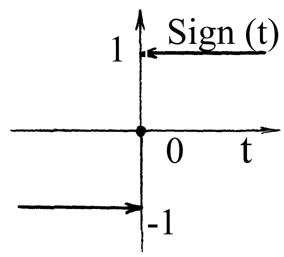
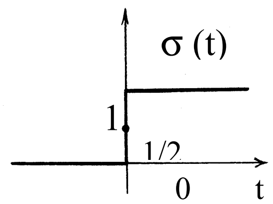
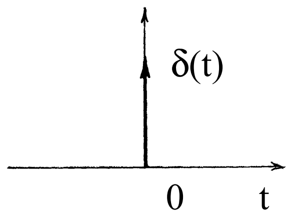
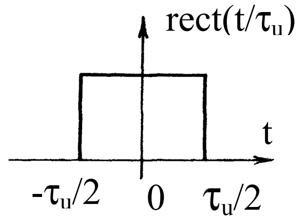
1. Описание сигналов с помощью разрывных функций

Цель описания сигналов с помощью разрывных функций состоит в получении их аналитического представления.

1.1. Простейшие разрывные функции

Простейшие разрывные функции, которыми пользуются в теории сигналов [1, 2], приведены в таблице 1

ТАБЛИЦА 1

№	Название функции	Аналитическая запись функции	Графическое изображение
1	Функция знака $Sign(t)$ (*сигнум–функция*)	**Sign(t)=** $\begin{cases} 1; & t>0 \\ 0; & t=0 \\ -1; & t<0 \end{cases}$	
2	Единичная функция $\sigma(t)$ (*функция Хевисайда*)	**σ(t)=** $\begin{cases} 1; & t>0 \\ 1/2; & t=0 \\ 0; & t<0 \end{cases}$	
3	Дельта-функция $\delta(t)$ *(функция Дирака)*	**δ(t)=** $\begin{cases} \infty; t=0 \\ 0; t \neq 0 \end{cases}$ $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt=1$	
4	Прямоугольный импульс с единичной высотой *rect(t/τи)* *(рект..функция)*	**rect(t/τи)=** $=\begin{cases} 1; /t/ \leq \tau_u/2 \\ 0; /t/ > \tau_u/2 \end{cases}$	

<u>1. Функция знака</u> $\mathrm{Sign}(t)$. Данная функция имеет постоянную величину, равную единице, знак которой скачком изменяется при переходе переменной t через нуль. Умножение произвольной функции $f(t)$ на $\mathrm{Sign}(t)$ означает изменение знака $f(t)$ в момент времени $t = 0$.

<u>2. Единичная функция</u> $\sigma(t)$**.** Сопоставляя аналитические записи функций $\sigma(t)$ и $\mathrm{Sign}(t)$, а также $\sigma(t)$ и $\delta(t)$, получим:

$$\sigma(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{Sign}(t)\right), \quad \sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt \qquad (1.1)$$

Умножение сигнала $S(t)$ на единичную функцию равносильно включению этого сигнала в момент $t = 0$. Этим приемом широко пользуются для описания сигналов на полубесконечном $(0 < t \le \infty)$ интервале времени. Помимо обозначения единичной функции $\sigma(t)$ в литературе часто встречается обозначение $1(t)$.

<u>3. Дельта-функция</u> $\delta(t)$**.** Значение функции равно нулю при всех отличных от нуля значениях аргумента, принимая в точке $t = 0$ бесконечно большое значение. Площадь под графиком δ-функции равна единице.

Остановимся на основных свойствах δ- функции:

а) Свойство четности.

$\delta(t)$ является четной функцией $\delta(t) = \delta(-t)$. Из этого следует, что:

$$\int_{-\infty}^{0} \delta(t)dt = \int_{0}^{\infty} \delta(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t > 0 \\ 1/2 & \text{при} \quad t = 0, \\ 0 & \text{при} \quad t < 0 \end{cases}$$

что доказывает справедливость второго равенства в (1.1.), которое можно записать иначе: $\delta(t) = d\sigma(t)/dt$. Следовательно, используя понятие δ- функции, можно выразить производную от разрывной функции в точке ее разрыва.

б) Фильтрующее свойство δ - функции.

Это свойство выражается соотношением:

$$\int_{t_a}^{t_b} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \qquad (1.2)$$

при $t_a < t_0 < t_b$. Таким образом, интеграл от произведения произвольной функции $f(t)$, ограниченной на интервале времени (t_a, t_b), на дельта функции $\delta(t-t_0)$, равен значению функции $f(t)$ в точке $t = t_0$.

в) Произведение произвольной функции $f(t)$ на $\delta(t-t_0)$.

Результатом умножения произвольной функции $f(t)$ на $\delta(t-t_0)$ является дельта-функция $\delta(t-t_0)$, площадь которой равна значению функции $f(t)$ в точке t_0:

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0). \qquad (1.3)$$

г) Энергетические свойства δ-функции:

Энергия дельта-функции бесконечно велика, т.е.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^2(t)dt = \infty.$$

Средняя мощность дельта-функции на бесконечном интервале времени равна единице:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta^2(t)dt = 1.$$

<u>4. Прямоугольный импульс единичной амплитуды</u> $rect(t/\tau_и)$

Эта функция (от греческого ***rectangular*** – прямоугольный) используется при описании финитных сигналов.

В частном случае, при $\tau_u \to 0$, получим единичный импульс

$$U(t) = \lim_{\tau_u \to 0} rect(t/\tau_u).$$

Таким образом, единичный импульс имеет единичную амплитуду и бесконечно малую длительность (рис. 1.1).