

Л. С. Атанасян

ГЕОМЕТРИЯ Лобачевского

4-е издание, электронное



Москва
Лаборатория знаний
2021

УДК 087.5:514

ББК 22.151

А92

Атанасян Л. С.

А92 Геометрия Лобачевского / Л. С. Атанасян. — 4-е изд., электрон. — М. : Лаборатория знаний, 2021. — 467 с. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10". — Загл. с титул. экрана. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-93208-508-0

Эта книга выгодно отличается от других пособий по геометрии Лобачевского. Материал излагается на основе школьной аксиоматики абсолютной геометрии и аксиомы Лобачевского. Первая часть книги посвящена планиметрии Лобачевского, а вторая — стереометрии. В конце каждой главы даются задачи, в конце книги — ответы и указания к ним.

Книга может с успехом использоваться студентами и преподавателями и физико-математических факультетов университетов, и педагогических вузов. Она также будет полезна учителям классов с углубленным изучением математики для индивидуальной работы с учениками, интересующимися математикой.

УДК 087.5:514

ББК 22.151

Деривативное издание на основе печатного аналога: Геометрия Лобачевского / Л. С. Атанасян. — 2-е изд., испр. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — 464 с. : ил. — ISBN 978-5-9963-0814-9.

В соответствии со ст.1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации

ISBN 978-5-93208-508-0

© Лаборатория знаний, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
-------------------	---

Часть I. Планиметрия

Глава 1. Обзор основных фактов абсолютной геометрии на плоскости	6
§ 1. Обзор основных следствий и аксиом групп I–III абсолютной планиметрии	6
§ 2. Треугольники	11
§ 3. Аксиомы непрерывности. Измерение отрезков и углов	18
§ 4. Движения. Осевая и центральная симметрии	23
§ 5. Сонаправленность лучей. Направленная прямая ..	28
Задачи к главе 1	32
Глава 2. Аксиома Лобачевского. Параллельные прямые на плоскости Лобачевского	35
§ 6. Аксиома Лобачевского. Теоремы о сумме углов треугольника и четырехугольника	35
§ 7. Признаки равенства треугольников на плоскости Лобачевского	41
§ 8. Предложения, эквивалентные аксиоме Лобачевского	46
§ 9. Параллельность луча и прямой	51
§ 10. Параллельность направленных прямых	55
§ 11. Параллельность ненаправленных прямых	60
§ 12. Функция Лобачевского	64
Задачи к главе 2	69
Глава 3. Взаимное расположение прямых на плоскости Лобачевского	73
§ 13. Двупрямоугольник. Четырехугольник Саккери ...	73
§ 14. Взаимное расположение параллельных прямых ..	77
§ 15. Расходящиеся прямые	85
§ 16. Заградительные прямые	91
§ 17. Проекция прямой на прямую	99
Задачи к главе 3	104

Глава 4. Окружность, эквидистанта и орицикл	107
§ 18. Пучки прямых на плоскости Лобачевского и их образы при движении	107
§ 19. Траектории пучков	112
§ 20. Окружность	120
§ 21. Взаимное расположение прямой и окружности и двух окружностей	126
§ 22. Эквидистанта	132
§ 23. Орицикл	138
§ 24. Взаимное расположение прямой и орицикла. Предельная линия	146
Задачи к главе 4	154
Глава 5. Треугольники, четырехугольники и правильные многоугольники	158
§ 25. Сумма углов треугольника	158
§ 26. Замечательные точки и прямые треугольника	166
§ 27. Взаимное расположение прямых, содержащих высоты треугольника	172
§ 28. Основные виды выпуклых четырехугольников	178
§ 29. Правильные многоугольники	189
Задачи к главе 5	195
Глава 6. Движения плоскости Лобачевского. Классификация движений	198
§ 30. Движения плоскости. Произведение движений	198
§ 31. Инвариантные точки и инвариантные прямые движения	202
§ 32. Орициклическое движение	210
§ 33. Классификация движений на плоскости Лобачевского	216
§ 34. Группа симметрий циклических линий	218
§ 35. Конгруэнтные отображения прямой на прямую. Движения прямой	221
Задачи к главе 6	225
Глава 7. Расширенная плоскость. Вырожденные треугольники	228
§ 36. Отображение плоскости Лобачевского на открытый круг	228
§ 37. Образы простейших фигур при отображении Ω_{Or}	234
§ 38. Несобственные точки плоскости. Расширенная плоскость	240
§ 39. Вырожденные треугольники	246

§ 40. Биссектрисы и высоты вырожденного треугольника	252
§ 41. Движения расширенной плоскости	261
Задачи к главе 7	269

Глава 8. Дефект и площадь многоугольника на плоскости Лобачевского	273
§ 42. Дефект многоугольника	273
§ 43. Площадь многоугольника. Равносоставленные и равновеликие многоугольники	280
§ 44. Основные теоремы о площадях многоугольников .	285
§ 45. Площадь вырожденного треугольника	291
Задачи к главе 8	296

Часть II. Стереометрия

Глава 1. Обзор основных фактов абсолютной геометрии в пространстве	300
§ 1. Обзор основных следствий из аксиом абсолютной геометрии трехмерного пространства	300
§ 2. Перпендикулярность прямых, прямой и плоскости	303
§ 3. Перпендикулярность плоскостей	306
§ 4. Движения пространства	310

Глава 2. Аксиома Лобачевского. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве Лобачевского	314
§ 5. Аксиома Лобачевского. Параллельность лучей ...	314
§ 6. Параллельность прямых в пространстве. Взаимное расположение прямых	317
§ 7. Параллельность прямой и плоскости. Взаимное расположение прямой и плоскости	321
§ 8. Параллельность плоскостей	327
§ 9. Взаимное расположение двух плоскостей	332
Задачи к главе 2	338

Глава 3. Простейшие поверхности в пространстве Лобачевского	341
§ 10. Связки прямых в пространстве и их траектории .	341
§ 11. Сфера	350
§ 12. Эквидистантная поверхность	354
§ 13. Орисфера	361

Глава 4. Орицикл. Внутренние геометрии орисферы и эквидистантной поверхности	368
§ 14. Длина дуги орицикла	368
§ 15. Концентрические дуги орициклов	372
§ 16. Гиперболические функции	377
§ 17. Трехвершинник. Абсолютная дуга орицикла	379
§ 18. Внутренние геометрии орисферы и эквидистантной поверхности	386
Задачи к главе 4	392
Глава 5. Гиперболическая тригонометрия и ее приложения	394
§ 19. Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике	394
§ 20. Тригонометрические соотношения в произвольном треугольнике	400
§ 21. Аналитическое выражение функции Лобачевского	406
§ 22. Теорема Чевы, свойства биссектрис и медиан треугольника	410
Задачи к главе 5	415
Глава 6. Непротиворечивость геометрии Лобачевского. Геометрия Лобачевского и реальное пространство	417
§ 23. Интерпретация Кэли—Клейна системы аксиом трехмерной геометрии Лобачевского	417
§ 24. Наложения в интерпретации Кэли—Клейна	421
§ 25. Проверка выполнения аксиом групп III—V в интерпретации Кэли—Клейна	429
§ 26. Открытие геометрии Лобачевского	432
§ 27. Геометрия Лобачевского и реальное пространство	436
Задачи к главе 6	441
Приложение 1	442
Приложение 2	444
Указания и ответы	447
Литература	455
Предметный указатель	456