МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ФУНКЦИИ ОТ МАТРИЦ

Учебное пособие для вузов

Составители:
Т. Н. Глушакова,
К. П. Лазарев

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2015

СОДЕРЖАНИЕ

Определение 7. Вектор f_k называется ***присоединенным вектором высоты*** $k-1$.

Определение 8. Присоединенный вектор высоты 1 называется просто *присоединенным вектором.*

Жорданов базис состоит из собственных и присоединенных векторов.

Утверждение. Алгебраическая кратность α_i собственного значения λ_i равна сумме размеров жордановых клеток с этим собственным значением (или числу собственных значений λ_i на главной диагонали).

Утверждение. Геометрическая кратность k_i собственного значения λ_i равна числу клеток в жордановой форме с собственным значением λ_i (или числу линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_i).

2.3. Алгоритм нахождения жордановой формы для матрицы 3-го порядка

Пусть дана матрица 3-го порядка. Надо найти жорданову форму и жорданов базис.

1. Пусть характеристический многочлен матрицы A_e имеет вид
$$\varphi(\lambda)=(-1)^3\cdot(\lambda-\lambda_1)\cdot(\lambda-\lambda_2)\cdot(\lambda-\lambda_3)\text{, где } \lambda_i\neq\lambda_j \quad (i\neq j).$$
Тогда жорданова форма матрицы имеет вид $A_f=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$.

2. Пусть характеристический многочлен матрицы A_e имеет вид
$$\varphi(\lambda)=(-1)^3\cdot(\lambda-\lambda_1)^2\cdot(\lambda-\lambda_2)\text{, где } \lambda_i\neq\lambda_j \quad (i\neq j).$$
Возможны два случая:

а) $rang(A_e-\lambda_1 I)=1$, поэтому $k_1=3-rang(A_e-\lambda_1 I)=2$ и, следовательно, $\alpha_1=k_1$, поэтому жорданова форма содержит две жордановы клетки с собственным значением λ_1: $A_f=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$;

б) $rang(A_e-\lambda_1 I)=2$, поэтому $k_1=3-rang(A_e-\lambda_1 I)=1$ и, следовательно, жорданова форма содержит одну жорданову клетку с собственным значением λ_1: $A_f=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$.

3. Пусть характеристический многочлен матрицы A_e имеет вид
$$\varphi(\lambda)=(-1)^3\cdot(\lambda-\lambda_1)^3.$$

Возможны два случая:

а) $rang(A_e - \lambda_1 I) = 1$, поэтому $k_1 = 3 - rang(A_e - \lambda_1 I) = 2$ и, следовательно, жорданова форма содержит две жордановы клетки с собственным значением λ_1: $A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$;

б) $rang(A_e - \lambda_1 I) = 2$, поэтому $k_1 = 3 - rang(A_e - \lambda_1 I) = 1$ и, следовательно, жорданова форма содержит одну жорданову клетку с собственным значением λ_1: $\mathrm{A_f} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

Замечание. Число единиц над главной диагональю в одной жордановой клетке равно числу присоединенных векторов.

3. ПРИМЕРЫ НАХОЖДЕНИЯ ЖОРДАНОВОЙ ФОРМЫ И ЖОРДАНОВА БАЗИСА ДЛЯ МАТРИЦ 3-го ПОРЯДКА

Приведем примеры нахождения жордановой формы и жорданова базиса для каждого из рассмотренных выше случаев.

Пример 1. Найти жорданову форму и жорданов базис матрицы оператора $A_e = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

Решение

Вычислим

$$\varphi(\lambda) = \det(\mathrm{A_e} - \lambda\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 \\ 6 & -4-\lambda & 4 \\ 4 & 1 & -6-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)\cdot(\lambda-2)\cdot(\lambda-3).$$

Таким образом, получили три собственных значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Так как алгебраическая кратность каждого из них равна 1, то жорданова форма имеет следующий вид: $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Найдем собственный вектор f_c^1, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 1$. Очевидно, что он является решением уравнения $(A_e - I)x = \theta$ и, следовательно,

$$A - I = \begin{array}{r} -1 \quad -3 \\ 2 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{array}{r} \\ -3 \end{array} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

то есть $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$, поэтому можем взять $f_1 = (1, 2, 1)$.

Найдем собственный вектор f_c^2, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 2$. Очевидно, что он удовлетворяет уравнению $(A_e - 2I)x = \theta$, поэтому