

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО ВГУ)

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ**

по курсу «МАТЕМАТИКА»

(Линейная алгебра и Теория вероятностей и математическая статистика)

для студентов 2 курса экономического факультета по направлениям

«Менеджмент» и «Управление персоналом»

Воронеж 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.....	6
ТЕМА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ.....	6
1.1 Определители второго и третьего порядка, их свойства.....	6
1.2 Матрицы. Действия над матрицами.....	15
1.3 Обратная матрица. Матричная запись системы линейных уравнений и ее решения.....	17
1.4 Системы линейных уравнений.....	20
ТЕМА 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.....	31
2.1 Линейные операции над векторами.....	31
2.2 Линейные операции над векторами в координатной форме.....	36
ТЕМА 3. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ.....	48
ЧАСТЬ II. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА.....	63
ТЕМА 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.....	63
Методические указания и примеры выполнения заданий.....	63
Индивидуальные задания.....	71
ТЕМА 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА.....	77
Методические указания и примеры выполнения заданий.....	78
Индивидуальные задания.....	90
ПЕРЕЧЕНЬ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ВОПРОСОВ.....	97
ЛИТЕРАТУРА.....	100

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что второй определитель равен

Δ

$$\begin{aligned} - \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} &= -(a_2 b_1 c_3 + a_3 b_2 c_1 + a_1 b_3 c_2 - a_3 b_1 c_2 - a_1 b_2 c_3 - a_2 b_3 c_1) = \\ &= a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 = \Delta, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

3°. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_3 \\ b_1 & b_1 & b_3 \\ c_1 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Доказательство. Докажем для строк. Обозначим величину исходного определителя Δ_1 . Поменяем в нем первую и вторую строку местами. Согласно свойству 2°, знак его меняется на противоположный

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\Delta_1.$$

Получили $\Delta_1 = -\Delta_1$, т.е. $2\Delta_1 = 0 \Rightarrow \Delta_1 = 0$.

4°. *Умножение определителя на число.* Чтобы умножить определитель на число, нужно все элементы произвольной строки (столбца) умножить на это число:

$$\lambda \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda \cdot a_1 & \lambda \cdot b_1 & \lambda \cdot c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Доказательство. Достаточно показать, что второй определитель равен

$\lambda\Delta$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= \lambda a_1 b_2 c_3 + \lambda a_3 b_1 c_2 + \lambda a_2 b_3 c_1 - \lambda a_3 b_2 c_1 - \lambda a_1 b_3 c_2 - \lambda a_2 b_1 c_3 = \\ &= \lambda (a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3) = \lambda \Delta, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

5°. Если все *элементы* некоторой строки (столбца) определителя *равны нулю*, то и сам определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. Следует из свойства 4°, если положить $\lambda = 0$.

6°. Если *элементы* двух строк (двух столбцов) *пропорциональны*, то определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \lambda \cdot a_1 & \lambda \cdot a_2 & \lambda \cdot a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. Если, согласно свойству 5°, вынести λ за определитель, то получим определитель с одинаковыми строками, который по свойству 3° равен 0.

7°. *Сложение определителей.* Если элементы некоторой строки (столбца) определителя есть суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, в которых элементы упомянутой строки (столбца) заменены отдельными слагаемыми, а остальные элементы являются общими для всех трех определителей:

$$\begin{vmatrix} a_1 + \tilde{a}_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + \tilde{b}_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 + \tilde{c}_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tilde{a}_1 & a_2 & a_3 \\ \tilde{b}_1 & b_2 & b_3 \\ \tilde{c}_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Достаточно вычислить определители справа и слева по формуле (1) и показать, что они равны.

8°. Если *к элементам* некоторой строки (столбца) определителя *прибавить* соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на произвольное число, то определитель не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_1 + \lambda a_2 & a_2 & a_3 \\ b_1 + \lambda b_2 & b_2 & b_3 \\ c_1 + \lambda c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. По свойству 7° разложим определитель на два

$$\begin{vmatrix} a_1 + \lambda a_2 & a_2 & a_3 \\ b_1 + \lambda b_2 & b_2 & b_3 \\ c_1 + \lambda c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_2 & a_2 & a_3 \\ \lambda b_2 & b_2 & b_3 \\ \lambda c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

что и требовалось доказать.

Алгебраические дополнения и миноры

Пусть дано n^2 вещественных чисел, для изображения которых используем одну букву с двумя индексами:

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn} \quad (5)$$

Расположим эти числа в n строк, и полученную таблицу заключим в вертикальные скобки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (6)$$

Таким образом обозначается определитель n -го порядка; при этом числа (5) называются э л е м е н т а м и определителя n -го порядка.

Определитель (6) обозначают также кратко: Δ , или $|a_{ij}|$, где первый индекс i указывает на номер строки, а второй индекс j - на номер столбца, которым принадлежит элемент a_{ij} , ($i=1,2,\dots,n$ $j=1,2,\dots,n$).

Итак,

$$\Delta = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Минором M_{ij} любого элемента a_{ij} определителя (6) называется определитель $(n-1)$ -го порядка, который получается из определителя (6) в результате вычеркивания i -ой строки и j -го столбца.

Например, для определителя второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = a_{22}, \quad M_{12} = a_{21}, \quad M_{21} = a_{12}, \quad M_{22} = a_{11}.$$

Определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

имеет 9 миноров, которые являются определителями второго порядка. В частности, определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} -$$

являются минорами элементов a_{11}, a_{12}, a_{13} .

Число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя (5).

Разложение определителя по элементам произвольной строки (столбца): каков бы ни был номер строки i , ($i=1,2,\dots,n$), или номер столбца j , ($j=1,2,\dots,n$), для определителя Δ n -го порядка справедливы формулы:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij} .

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Пример 1. Вычислить $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$.

Решение: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 3 = -5$.

Пример 2. Вычислить $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 28 + 15 = -10.$$

Пример 3. Вычислить $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 5 = -5 + 12 - 8 + 3 - 20 = -10$$

Пример 4. Вычислить определитель четвертого порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение: Найдем миноры элементов первой строки:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 16, & M_{12} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -24, \\ M_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -6, & M_{14} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -12 \end{aligned}$$

Откуда $A_{11} = 16, A_{12} = 24, A_{13} = -6, A_{14} = 12$.

По определению определителя имеем:

$$\Delta = 1 \cdot 16 + 2 \cdot 24 + (-1) \cdot (-6) + 5 \cdot 12 = 130.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить определитель.
2. Вычислить, используя свойства определителя.

1. а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix}$	б) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}$
2. а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$	б) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 0 & -2 \end{vmatrix}$