МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТРОЙНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ. ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКИ

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:
П.С. Украинский,
Г.А. Виноградова

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2011

Введение

В настоящем пособии рассматриваются методы вычисления тройных, поверхностных и криволинейных интегралов и их приложения к задачам геометрии, механики, физики. Это пособие является логическим продолжением работы [1], в которой рассматриваются методы решения двойных интегралов.

В работе приводится список формул для вычисления геометрических и механических величин. Приведены примеры вычислений таких величин. Аналогичные задачи содержит курсовая работа для студентов второго курса факультета ПММ. Задания по курсовой работе содержатся в [2].

§ 1. Вычисление тройных интегралов

Приступая к вычислению тройных интегралов, надо хорошо овладеть методами вычисления двойных интегралов. Вспомним одну из двух элементарных областей для записи двойного повторного интеграла

$$G = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}.$$

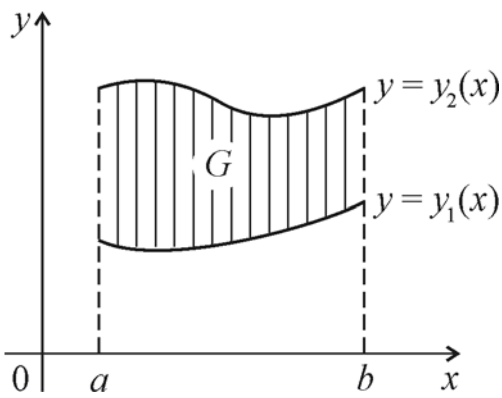

Рис. 1

Теперь рассмотрим трехмерную декартову систему координат с осями OX, OY, OZ и область G, лежащую на плоскости XOY. Через каждую точку границы области G проведем прямую, параллельную оси OZ. Эти прямые будут образующими цилиндрической поверхности. Пусть для $(x, y) \in G$ заданы две функции $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$, причем $z_1(x, y) \leqslant z_2(x, y)$. Этим двум функциям соответствуют две поверхности: нижняя и верхняя. Область D (тело D), лежащая внутри цилиндра и

§ 2. Переход к цилиндрическим координатам

В тройном интеграле, так же как и ранее в других интегралах, можно делать замену переменных. Общую теорему о замене переменных посмотрите в учебнике. Здесь рассмотрим два частных случая.

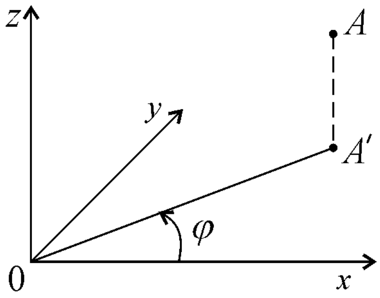

Рис. 6

Рассмотрим точку $A(x, y, z) \in R^3$. Пусть A' – проекция точки A на плоскость XOY. Обозначим через φ угол между положительным направлением оси OX и отрезком OA'. положительное направление отсчета углов как в полярных координатах. Расстояние OA' обозначим через r, высоту точки A над плоскостью XOY через h.

r, $\varphi\, h$ – цилиндрические координаты точки A.

Цилиндрические и декартовы координаты связаны формулами:

$x = r\cos\varphi$,

$y = r\sin\varphi$,

$z = h$.

Якобиан такого преобразования $J = r$. Для перехода к повторному интегралу в цилиндрической системе координат область интегрирования D должна быть ограничена нижней $h = h_1(r, \varphi)$ и верхней $h = h2(r, \varphi)$ поверхностями, считая, что направление вверх задает ось OZ. Проекция G области D на XOY должна подходить к расстановке пределов интегрирования в полярных координатах.

$$G = \{(r, \varphi) : \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,\ r_1(\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\varphi)\}.$$

Тогда

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} dr \int\limits_{h_1(r,\varphi)}^{h_2(r,\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h) r\, dh.$$

Иногда в этой формуле меняют ролями переменные, а менять порядок интегрирования приходится редко.

Пример 3. В интеграле $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, где $D = \{(x,y,z) : 2x \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4x,\ y \geqslant -\sqrt{3}x,\ 0 \leqslant z \leqslant y\}$, перейти к цилиндрическим координатам и записать ответ в виде повторного интеграла.

Решение. Здесь $z=0$ – нижняя поверхность тела, $z=y$ – верхняя поверхность тела. Поэтому цилиндрические координаты вводим по стандартным формулам.

$x = r\cos\varphi$,
$y = r\sin\varphi$,
$z = h$.

Тогда $z=0$ переходит в $h=0$, $z=y$ в $h=r\sin\varphi$. Уравнение $2x=x^2+y^2$ на плоскости XOY задает окружность $(x^2-1)^2+y^2=1$, а в пространстве это будет цилиндр. Переводя уравнение $x^2+y^2=2x$ в цилиндрические координаты, получим $r=2\cos\varphi$. Аналогично $x^2+y^2=4x$ в цилиндрических $r=4\cos\varphi$ – тоже цилиндр $(x-2)^2+y^2=4$. Тело находится между двух цилиндров, вверх от плоскости $h=0$ и ниже плоскости $h=r\sin\varphi$. Область на плоскости лежит между двух окружностей и выше прямой $y=-\sqrt{3}$ в цилиндрических координатах $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$. Проекция тела на плоскость XOY имеет вид:

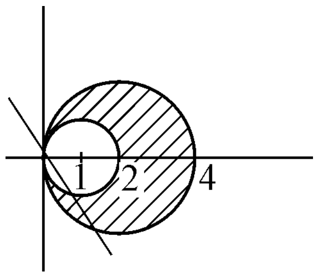

Рис. 7

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} dr \int\limits_0^{r\sin\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h) r\,dh.$$

§ 3. Переход к сферическим координатам

Положение точки $A(x,y,z)$ зададим теперь следующим образом: $r=OA$ – расстояние между началом координат O и точкой A. $r \geqslant 0$.

ŋqdqɐeɎ bɆ dedɆbɎɜe d ɕɔɑbɔɐ Ɉqddɏqɐè

ψ – угол между вектором OA и плоскостью XOY. $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

φ – угол, лежащий в плоскости XOY, между положительным направлением оси OX и вектором OA', где A' – проекция точки A на плоскость XOY.

Точку $O(0,0,0)$ называют полюсом.

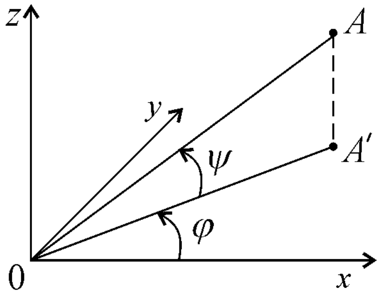

Рис. 8

Получим

$x = r\cos\varphi\cos\psi$,

$y = r\sin\varphi\cos\psi$,

$z = r\sin\psi$.

Якобиан $J = r^2\cos\psi$.

Замечание. В некоторых учебниках за угол ψ берут угол между OZ и OA. Тогда формулы связи между (x,y,z) и (r,φ,ψ) и якобиан будут другими.

Чтобы тройной интеграл в сферических координатах свести к повторному, область $D \subset R^3$ должна задаваться следующими условиями:

$r_1(\varphi,\psi) \leqslant r \leqslant r_{(}\varphi,\psi)$,

$\psi_1(\varphi) \leqslant \psi \leqslant \psi_2(\varphi)$,

$\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$.

Здесь $r = r_1(\varphi,\psi)$ – ближняя к полюсу O поверхность. Ближняя поверхность может вырождаться в точку O, $r = 0$.

$r = r_2(\varphi,\psi)$ – дальняя поверхность от полюса O.

Чтобы найти ближнюю и дальнюю поверхность на чертеже, надо провести произвольный луч из полюса O, пересекающий тело D. Если двигаться по этому лучу от полюса, то мы войдем в тело через ближнюю поверхность и выйдем из тела через дальнюю поверхность. Если выходя из полюса по лучу, мы сразу попадаем в тело, то $r_1(\varphi,\psi) \equiv 0$. $\psi = \psi_1(\varphi)$ и $\psi = \psi_2(\varphi)$ – некоторые конические поверхности с вершиной O. Получим