

УДК 517.957

КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2017 г. А. А. Дуюнова^{1,*}, В. В. Лычагин^{1,2}, С. Н. Тычков¹

Представлено академиком РАН С.Н. Васильевым 26.12.2016 г.

Поступило 13.01.2017 г.

В работе даётся классификация уравнений состояний для вязкой жидкости (или газа), описываемой системой дифференциальных уравнений Навье–Стокса. Классификация основывается на анализе симметрий, допускаемых системой.

DOI: 10.7868/S0869565217120015

Рассмотрим течения вязких жидкостей в трёхмерном пространстве, описываемые следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= -\text{grad } p + \eta \Delta \mathbf{u} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}), \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } \mathbf{u} &= 0, \\ T\rho \frac{Ds}{Dt} &= k\Delta T + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — поле скоростей жидкости, p, ρ, s, T — давление, плотность, удельная энтропия и температура соответственно, а тензор

$$\sigma_{ij} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

есть тензор вязких напряжений среды, и

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } f$$

есть материальная производная.

Предполагается, что коэффициенты теплопроводности k и вязкости ζ и η постоянны.

Отметим, что первое уравнение системы (1) — это трёхмерное уравнение Навье–Стокса, второе — уравнение непрерывности, а третье — уравнение теплопроводности [1].

Прежде всего заметим, что система (1) не замкнута. Для её замыкания необходимы ещё два

соотношения, которые могут быть получены из термодинамических свойств среды.

Как правило, из-за недостатка уравнений состояния жидких сред при решении задач гидродинамики для замыкания системы уравнений используются различные упрощения и гипотезы (несжимаемость, изоэнтропичность), применение которых не всегда корректно. Подход, используемый в данной работе, заключается в применении аппарата дифференциальной геометрии к классификации уравнений состояний с точки зрения допускаемых ими симметрий, действующих в пространстве термодинамических переменных. Полученные таким образом уравнения состояния можно использовать для аппроксимации экспериментальных данных и отыскания симметрий, допускаемых реальной жидкой средой, которые также можно использовать для редукции системы уравнений Навье–Стокса.

Изучим алгебры симметрий системы уравнений Навье–Стокса в их зависимости от термодинамических состояний. Алгебра симметрий состоит из чисто геометрической и термодинамической частей. Геометрическая часть алгебры симметрий представлена группой движений, преобразованиями Галилея и сдвигами вдоль оси времени. Термодинамическая часть напрямую зависит от симметрий термодинамических состояний.

Рассмотрим классификацию термодинамических состояний и соответствующих алгебр Ли для случаев, когда термодинамические состояния допускают одномерную или двумерную алгебры симметрий.

Подробный обзор уравнений термодинамических состояний, полученных экспериментальными методами, можно найти в [5].

¹ Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской Академии наук, Москва

² University of Tromsø, Norway

*E-mail: duyunova_anna@mail.ru

Для описания термодинамических состояний рассмотрим пятимерное контактное многообразие \mathbb{R}^5 , снабжённое координатами $(p, \rho, s, T, \varepsilon)$ и контактной 1-формой

$$\theta = d\varepsilon - Tds - \frac{p}{\rho^2} d\rho.$$

Уравнение состояния $\varepsilon = \varepsilon(\rho, s)$, в котором удельная внутренняя энергия ε является функцией плотности ρ и удельной энтропии s , задаёт двумерное лежандрово многообразие L в \mathbb{R}^5 :

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, s), \quad T = \frac{\partial \varepsilon}{\partial s}, \quad p = \rho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho},$$

являющееся интегральным многообразием контактной формы θ .

Иначе говоря, на многообразии L выполняется первый закон термодинамики [2]:

$$\theta|_L = 0.$$

В общем случае под термодинамическим состоянием понимается 2-мерное лежандрово многообразие $L \subset \mathbb{R}^5$.

Заметим также, что удельная внутренняя энергия ε не входит в число неизвестных функций в системе (1). Чтобы исключить её из описания термодинамического состояния, рассмотрим проекцию $\phi: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\phi: (p, \rho, s, T, \varepsilon) \mapsto (p, \rho, s, T)$. Ограничение отображения ϕ на поверхность состояния L является локальным диффеоморфизмом на образ $\bar{L} = \phi(L)$, а поверхность $\bar{L} \subset \mathbb{R}^4$ — погружённым лагранжевым многообразием в четырёхмерном симплектическом пространстве \mathbb{R}^4 со структурной формой

$$\Omega = ds \wedge dT + \rho^{-2} d\rho \wedge dp.$$

Отметим, что удельную внутреннюю энергию ε можно восстановить с точностью до константы, зная лагранжево многообразие \bar{L} .

Таким образом, термодинамическое состояние можно определить как лагранжево многообразие в симплектическом пространстве (\mathbb{R}^4, Ω) .

Двумерная поверхность \bar{L} задается уравнениями

$$\begin{aligned} F(p, \rho, s, T) &= 0, \\ G(p, \rho, s, T) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

а условие того, что поверхность \bar{L} лагранжева, может быть выражено следующим образом:

$$[F, G] = 0 \text{ на } \bar{L}, \quad (3)$$

где $[F, G]$ — скобка Пуассона относительно симплектической формы Ω , т.е.

$$[F, G]\Omega^2 = dF \wedge dG \wedge \Omega.$$

В координатах (p, ρ, s, T) эта скобка имеет вид

$$[F, G] = \rho^2 \left(\frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial G}{\partial T} - \frac{\partial F}{\partial T} \frac{\partial G}{\partial s}.$$

Системой уравнений Навье—Стокса называется система уравнений (1), дополненная лагранжевой поверхностью $\bar{L} \subset \mathbb{R}^4$ или двумя уравнениями состояния (2), удовлетворяющими соотношению (3).

Заметим, что условие $[F, G] = 0 \bmod \{F = 0, G = 0\}$ эквивалентно условию интегрируемости системы уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} F \left(\rho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}, \rho, s, \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \right) &= 0, \\ G \left(\rho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}, \rho, s, \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, система уравнений Навье—Стокса — это система (1), дополненная уравнениями состояния (2), где функции F и G удовлетворяют дополнительному соотношению (3).

Геометрически мы представляем эту систему следующим образом. Пусть $\pi: \mathbb{R}^{11} \rightarrow \mathbb{R}^4$ — семи-мерное расслоение:

$$\pi: (t, x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3, \rho, s, p, T) \mapsto (t, x_1, x_2, x_3).$$

Тогда система (2) определяет уравнение нулевого порядка $\mathcal{E}_0 \subset J^0 \pi$.

Обозначим $\mathcal{E}_1 \subset J^1 \pi$ систему порядка ≤ 1 , полученную первым продолжением системы \mathcal{E}_0 и четвёртым уравнением (непрерывности) системы (1).

Система дифференциальных уравнений $\mathcal{E}_2 \subset J^2 \pi$ порядка ≤ 2 состоит из первого продолжения системы \mathcal{E}_1 и всех уравнений второго порядка системы (1).

Для порядков $k \geq 3$ определим $\mathcal{E}_k \subset J^k \pi$ как $(k-2)$ -е продолжение системы \mathcal{E}_2 .

Симметрии системы уравнений Навье—Стокса являются точечными (см. [6]), т.е. порождаются векторными полями X в пространстве джетов $J^0 \pi$ такими, что их второе продолжение $X^{(2)}$ касается подмногообразия $\mathcal{E}_2 \subset J^2 \pi$.

Для описания алгебры Ли симметрий системы Навье—Стокса рассмотрим алгебру Ли \mathfrak{g} , порождённую векторными полями на пространстве $J^0\pi$:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_{x_1}, \quad X_2 = \partial_{x_2}, \quad X_3 = \partial_{x_3}, \\ X_4 &= -x_2 \partial_{x_1} + x_1 \partial_{x_2} - u_2 \partial_{u_1} + u_1 \partial_{u_2}, \\ X_5 &= -x_3 \partial_{x_2} + x_2 \partial_{x_3} - u_3 \partial_{u_2} + u_2 \partial_{u_3}, \\ X_6 &= -x_1 \partial_{x_3} + x_3 \partial_{x_1} - u_1 \partial_{u_3} + u_3 \partial_{u_1}, \\ X_7 &= t \partial_{x_1} + \partial_{u_1}, \quad X_8 = t \partial_{x_2} + \partial_{u_2}, \quad X_9 = t \partial_{x_3} + \partial_{u_3}, \\ X_{10} &= \partial_t, \quad X_{11} = \partial_s, \quad X_{12} = \partial_p, \\ X_{13} &= x_1 \partial_{x_1} + x_2 \partial_{x_2} + x_3 \partial_{x_3} + u_1 \partial_{u_1} + \\ &\quad + u_2 \partial_{u_2} + u_3 \partial_{u_3} - 2\rho \partial_\rho + 2T \partial_T, \\ X_{14} &= t \partial_t - u_1 \partial_{u_1} - u_2 \partial_{u_2} - u_3 \partial_{u_3} + \\ &\quad + \rho \partial_\rho - p \partial_p - 2T \partial_T. \end{aligned}$$

Обозначим через \mathfrak{h} алгебру Ли, порождённую векторными полями

$$\begin{aligned} Y_1 &= \partial_s, \quad Y_2 = \partial_p, \quad Y_3 = \rho \partial_\rho - T \partial_T, \\ Y_4 &= p \partial_p + T \partial_T. \end{aligned}$$

Пусть $\vartheta: \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{h}$ — гомоморфизм алгебр Ли, где

$$\vartheta(X) = X(\rho) \partial_\rho + X(s) \partial_s + X(p) \partial_p + X(T) \partial_T$$

и $X \in \mathfrak{g}$.

Ядро гомоморфизма ϑ — это идеал $\mathfrak{g}_{\text{ин}}$ в алгебре Ли \mathfrak{g} , порождённый векторными полями X_1, \dots, X_{10} .

Пусть также \mathfrak{h}_t — это подалгебра алгебры Ли \mathfrak{h} , которая сохраняет термодинамические состояния (2). Тогда верна следующая

Теорема 1. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}_{\text{ин}}}$ симметрий системы уравнений Навье—Стокса совпадает с образом*

$$\vartheta^{-1}(\mathfrak{h}_t).$$

Отметим, что обычно уравнениями состояния пренебрегают, и векторные поля вида $f(t)\partial_p$, где f — произвольная функция, рассматриваются как симметрии уравнений Навье—Стокса. В этом случае алгебра симметрий неполной системы Навье—Стокса является бесконечномерной.

Также в случае уравнений состояния общего вида алгебра $\mathfrak{h}_t = 0$ и алгебра симметрий совпадает с алгеброй $\mathfrak{g}_{\text{ин}}$.

Классифицируем уравнения термодинамических состояний (ср. [3]), т.е. лагранжевы многообразия $\bar{L} \subset \mathbb{R}^4$, в зависимости от алгебры симметрий $\mathfrak{h}_t \subset \mathfrak{h}$. Для этого рассмотрим одно- и двумерную подалгебры Ли в алгебре \mathfrak{h} и опишем

лагранжевы многообразия, инвариантные относительно этих подалгебр. Рассмотрим только случаи одно- и двумерных подалгебр, поскольку для алгебр Ли размерности 3 физически осмысленных инвариантных уравнений состояний нет.

Начнём с размерности 1, $\dim \mathfrak{h}_t = 1$.

Пусть вектор $Z = \sum_{i=1}^4 \lambda_i Y_i$ задаёт базис в этой алгебре.

Поверхность состояния $\bar{L} \subset \mathbb{R}^4$ лагранжева, т.е. $\Omega|_{\bar{L}} = 0$, и векторное поле Z касается поверхности \bar{L} тогда и только тогда, когда дифференциальная 1-форма

$$\iota_Z \Omega = \frac{\lambda_3}{\rho} dp - \frac{\lambda_4 p + \lambda_2}{\rho^2} d\rho + (\lambda_3 - \lambda_4) T ds + \lambda_1 dT$$

обращается в ноль на \bar{L} .

Иначе говоря, поверхность \bar{L} является решением следующей системы уравнений:

$$\Omega|_{\bar{L}} = 0,$$

$$(\iota_Z \Omega)|_{\bar{L}} = 0.$$

Соотношения

$$T = \frac{\partial \varepsilon(\rho, s)}{\partial s}, \quad p = \rho^2 \frac{\partial \varepsilon(\rho, s)}{\partial \rho}$$

и последнее уравнение $(\iota_Z \Omega)|_{\bar{L}} = 0$ позволяют получить два дифференциальных уравнения на удельную внутреннюю энергию $\varepsilon(\rho, s)$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial s^2} + \lambda_3 \rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial s \partial \rho} + (\lambda_3 - \lambda_4) \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} &= 0, \\ \lambda_3 \rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial s \partial \rho} + (2\lambda_3 - \lambda_4) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} - \frac{\lambda_2}{\rho^2} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Можно проверить, что скобка Майера [4] этих двух уравнений обращается в ноль, следовательно, система формально интегрируема. Решая систему (4) для случая общих значений коэффициентов λ , находим выражения для давления и температуры:

$$T = \rho^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} F', \quad p = \rho^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} \left(\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_3} - 1 \right) F - \frac{\lambda_1}{\lambda_3} F' \right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_4}, \quad (5)$$

где

$$F = F \left(s - \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \ln \rho \right)$$

есть произвольная гладкая функция.

Особые случаи для коэффициентов λ перечислены ниже.