

**УДК 004.02**  
**ББК 32.972**  
**Р82**

**Р82** Мануэль Рубио-Санчес

Введение в рекурсивное программирование / пер. с англ. Е. В. Борисова. – М.: ДМК Пресс, 2019. – 436 с.: ил.

**ISBN 978-5-97060-703-9**

Книга охватывает почти весь круг теоретических и практических вопросов, относящихся к рекурсии и рекурсивному программированию, что делает её прекрасным дополнением к уже существующим немногочисленным книгам на эту тему. На множестве примеров и задач – от простых к сложным – читатель постепенно погружается в рекурсию, учится мыслить рекурсивно и, отталкиваясь от декларативной парадигмы программирования, создавать рекурсивные алгоритмы с использованием пошаговой методики и специальных схем декомпозиции задач. При этом автор беспристрастно сопоставляет рекурсивные алгоритмы с итерационными, отмечая достоинства и недостатки тех и других.

Все алгоритмы в книге реализованы на языке Python 3.

Издание предназначено студентам вузов, преподавателям, а также широкому кругу разработчиков, желающих эффективно применять рекурсивные алгоритмы в своей работе.

**УДК 004.02**  
**ББК 32.973**

Copyright © 2018 by Taylor & Francis Group, LLC. CRC Press is an imprint of Taylor & Francis Group, an Informa business. All rights reserved. Russian-language edition copyright © 2019 by DMK Press. All rights reserved.

Все права защищены. Любая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения владельцев авторских прав.

Материал, изложенный в данной книге, многократно проверен. Но, поскольку вероятность технических ошибок все равно существует, издательство не может гарантировать абсолютную точность и правильность приводимых сведений. В связи с этим издательство не несет ответственности за возможные ошибки, связанные с использованием книги.

ISBN 978-1-4987-3528-5 (англ.)  
 ISBN 978-5-97060-703-9 (рус.)

© 2018 by Taylor & Francis Group, LLC  
 © Оформление, перевод на русский язык, издание,  
 ДМК Пресс, 2019

# Оглавление

<b>Предисловие</b> .....	12
Целевая аудитория.....	14
Содержание и структура книги .....	15
Примерные учебные курсы .....	17
Благодарности .....	17
<b>Глава 1. Основные понятия рекурсивного программирования</b> .....	19
1.1. Распознавание рекурсии.....	19
1.2. Декомпозиция задачи .....	25
1.3. Рекурсивный код.....	33
1.4. Индукция .....	40
1.4.1. Математические доказательства методом индукции.....	40
1.4.2. Рекурсивная убеждённость .....	41
1.4.3. Императивное и декларативное программирование .....	43
1.5. Рекурсия против итерации.....	44
1.6. Типы рекурсии.....	46
1.6.1. Линейная рекурсия.....	46
1.6.2. Хвостовая рекурсия .....	46
1.6.3. Множественная рекурсия.....	47
1.6.4. Взаимная рекурсия.....	47
1.6.5. Вложенная рекурсия .....	48
1.7. Упражнения .....	48
<b>Глава 2. Методика рекурсивного мышления</b> .....	51
2.1. Шаблон проектирования рекурсивных алгоритмов .....	51
2.2. Размер задачи .....	52
2.3. Начальные условия .....	54
2.4. Декомпозиция задачи .....	57
2.5. Рекурсивные условия, индукция и схемы.....	61
2.5.1. Рекурсивное мышление посредством схем .....	61
2.5.2. Конкретные экземпляры задачи .....	65
2.5.3. Альтернативные обозначения.....	66

2.5.4. Процедуры.....	67
2.5.5. Несколько подзадач.....	69
2.6. Тестирование.....	71
2.7. Упражнения.....	75
<b>Глава 3. Анализ времени выполнения рекурсивных алгоритмов .....</b>	<b>77</b>
3.1. Предварительные математические соглашения.....	77
3.1.1. Степени и логарифмы.....	78
3.1.2. Биномиальные коэффициенты.....	78
3.1.3. Пределы и правило Лопиталья.....	79
3.1.4. Суммы и произведения.....	79
3.1.5. Верхняя и нижняя границы.....	85
3.1.6. Тригонометрия.....	86
3.1.7. Векторы и матрицы.....	87
3.2. Временная сложность вычислений.....	89
3.2.1. Порядок роста функций.....	90
3.2.2. Асимптотические обозначения.....	92
3.3. Рекуррентные соотношения.....	95
3.3.1. Метод расширения.....	99
3.3.2. Общий метод решения разностных уравнений.....	107
3.4. Упражнения.....	119
<b>Глава 4. Линейная рекурсия I: основные алгоритмы.....</b>	<b>122</b>
4.1. Арифметические операции.....	123
4.1.1. Степенная функция.....	123
4.1.2. Медленное сложение.....	127
4.1.3. Двойная сумма.....	131
4.2. Системы счисления.....	132
4.2.1. Двоичное представление неотрицательного целого числа.....	133
4.2.2. Приведение десятичного числа к другому основанию.....	135
4.3. Строки.....	136
4.3.1. Обращение строки.....	137
4.3.2. Является ли строка палиндромом?.....	137
4.4. Дополнительные задачи.....	139
4.4.1. Сортировка выбором.....	139
4.4.2. Схема Горнера.....	141
4.4.3. Треугольник Паскаля.....	143
4.4.4. Резистивная цепь.....	145
4.5. Упражнения.....	147

<b>Глава 5. Линейная рекурсия II: хвостовая рекурсия</b>	<b>151</b>
5.1. Логические функции	152
5.1.1. Есть ли в неотрицательном целом числе заданная цифра?	152
5.1.2. Равны ли строки?	155
5.2. Алгоритмы поиска в списке	156
5.2.1. Линейный поиск	157
5.2.2. Двоичный поиск в отсортированном списке	159
5.3. Двоичные деревья поиска	161
5.3.1. Поиск элемента	163
5.3.2. Вставка элемента	165
5.4. Схемы разбиения	165
5.4.1. Основная схема разбиения	167
5.4.2. Метод разбиения Хоара	168
5.5. Алгоритм quickselect	173
5.6. Двоичный поиск корня функции	174
5.7. Задача лесоруба	177
5.8. Алгоритм Евклида	182
5.9. Упражнения	184
<b>Глава 6. Множественная рекурсия I: «разделяй и властвуй»</b>	<b>188</b>
6.1. Отсортирован ли список?	189
6.2. Сортировка	190
6.2.1. Алгоритм сортировки слиянием	191
6.2.2. Алгоритм быстрой сортировки	194
6.3. Мажоритарный элемент списка	197
6.4. Быстрое целочисленное умножение	200
6.5. Умножение матриц	203
6.5.1. Умножение матриц методом «разделяй и властвуй»	203
6.5.2. Алгоритм Штрассена умножения матриц	207
6.6. Задача укладки тримино	208
6.7. Задача очертания	213
6.8. Упражнения	219
<b>Глава 7. Множественная рекурсия II: пазлы, фракталы и прочее</b>	<b>222</b>
7.1. Путь через болото	222
7.2. Ханойская башня	226

7.3. Обходы дерева .....	230
7.3.1. Внутренний обход.....	231
7.3.2. Прямой и обратный обходы.....	233
7.4. Самый длинный палиндром в строке .....	234
7.5. Фракталы .....	236
7.5.1. Снежинка Коха .....	236
7.5.2. Ковёр Серпиньского.....	242
7.6. Упражнения .....	245
<b>Глава 8. Задачи подсчёта .....</b>	<b>250</b>
8.1. Перестановки.....	251
8.2. Размещения с повторениями .....	253
8.3. Сочетания .....	255
8.4. Подъём по лестнице .....	256
8.5. Путь по Манхэттену.....	259
8.6. Триангуляция выпуклого многоугольника .....	260
8.7. Пирамиды из кругов.....	263
8.8. Упражнения .....	265
<b>Глава 9. Взаимная рекурсия .....</b>	<b>268</b>
9.1. Чётность числа .....	269
9.2. Игры со многими игроками .....	270
9.3. Размножение кроликов .....	271
9.3.1. Зрелые и незрелые пары кроликов .....	272
9.3.2. Родовое дерево кроликов .....	273
9.4. Задача о станциях водоочистки.....	277
9.4.1. Переток воды между городами.....	278
9.4.2. Сброс воды в каждом городе.....	280
9.5. Циклические ханойские башни .....	282
9.6. Грамматика и синтаксический анализатор на основе рекурсивного спуска .....	288
9.6.1. Лексический анализ входной строки.....	288
9.6.2. Синтаксический анализатор на основе рекурсивного спуска.....	293
9.7. Упражнения .....	302
<b>Глава 10. Выполнение программы.....</b>	<b>306</b>
10.1. Поток управления между подпрограммами .....	309
10.2. Деревья рекурсии.....	312

## 10 ❖ Оглавление

10.2.1. Анализ времени выполнения.....	318
10.3. Программный стек.....	320
10.3.1. Стековые кадры.....	320
10.3.2. Трассировка стека.....	323
10.3.3. Пространственная сложность вычислений.....	325
10.3.4. Ошибки предельной глубины рекурсии и переполнения стека.....	326
10.3.5. Рекурсия как альтернатива стеку.....	327
10.4. Мемоизация и динамическое программирование.....	332
10.4.1 Мемоизация.....	332
10.4.2. Граф зависимости и динамическое программирование.....	336
10.5. Упражнения.....	340
<b>Глава 11. Вложенная рекурсия и снова хвостовая.....</b>	<b>347</b>
11.1. Хвостовая рекурсия и итерация.....	347
11.2. Итерационный подход к хвостовой рекурсии.....	351
11.2.1. Факториал.....	352
11.2.2. Приведение десятичного числа к другому основанию.....	353
11.3. Вложенная рекурсия.....	356
11.3.1. Функция Аккермана.....	356
11.3.2. Функция-91 Маккарти.....	357
11.3.3. Цифровой корень.....	357
11.4. К хвостовой и вложенной рекурсии через обобщённую функцию.....	359
11.4.1. Факториал.....	359
11.4.2. Приведение десятичного числа к к другому основанию.....	363
11.5. Упражнения.....	365
<b>Глава 12. Множественная рекурсия III: перебор с возвратами.....</b>	<b>366</b>
12.1. Введение.....	367
12.1.1. Частичные и полные решения.....	367
12.1.2. Рекурсивная структура.....	369
12.2. Генерация комбинаторных объектов.....	371
12.2.1. Подмножества.....	372
12.2.2. Перестановки.....	377
12.3. Задача $n$ ферзей.....	381
12.3.1. Поиск всех решений.....	383
12.3.2. Поиск одного решения.....	384
12.4. Задача о сумме элементов подмножества.....	387
12.5. Путь в лабиринте.....	390

12.6. Судoku.....	396
12.7. Задача о рюкзаке 0–1 .....	402
12.7.1. Стандартный алгоритм перебора с возвратами .....	402
12.7.2. Алгоритм ветвей и границ .....	407
12.8. Упражнения.....	411
<b>Что ещё почитать.....</b>	<b>416</b>
Монографии о рекурсии .....	416
Разработка и анализ алгоритмов .....	416
Функциональное программирование .....	417
Язык Python .....	417
Исследования в обучении и изучении рекурсии.....	417
<b>Дополнительная литература.....</b>	<b>418</b>
<b>Список рисунков.....</b>	<b>420</b>
<b>Список таблиц.....</b>	<b>426</b>
<b>Список листингов .....</b>	<b>426</b>
<b>Предметный указатель .....</b>	<b>432</b>