МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

РЯДЫ

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:
Ф.В. Голованёва,
Е.В. Петрова

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2011

1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Определение. Пусть дана числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ $a_n, \ldots$ Выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

называется числовым рядом.

Определение. Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ называют членами ряда, a_n – общим членом ряда.

Определение. Суммы конечного числа первых членов ряда

$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots,\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, \ldots$

называют частичными суммами ряда (1). S_n – n-ая частичная сумма.

Частичные суммы ряда образуют числовую последовательность частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Определение. Ряд (1) называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм сходится к какому-нибудь конечному числу S, которое называется суммой ряда (1). Символически это записывается так: $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ или $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Другими словами, ряд (1) сходится, если существует и конечен $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Определение. Ряд (1) называется расходящимся, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Такой ряд не имеет суммы.

Рассмотрим некоторые свойства числовых рядов.

Свойство 1. Если сходится ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, то сходится и ряд $a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots$, получаемый из данного ряда отбрасыванием первых m членов. Ряд $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n$ называется m-м остатком ряда (1).

Свойство 2. Если сходится ряд (1) и суммой его является число S, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u a_n$, где u – произвольное число, причем сумма последнего ряда равна uS.

Свойство 3. Если сходятся ряды $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ и $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$, имеющие соответственно суммы S_1 и S_2, то сходится и ряд $(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + (u_3 \pm v_3) + \ldots$, причем сумма последнего ряда равна $S_1 \pm S_2$.

ŋqdqayeY bÆ deqÆbYзe d acqacy 3qdqYqyè

В этом случае исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется абсолютно сходящимся.

Сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется условно сходящимся, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится, то ряд, полученный из него после любой перестановки его членов, абсолютно сходится и имеет ту же сумму, что и первоначальный ряд.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ условно сходится, то при перестановке бесконечного множества его членов сумма ряда может измениться. В частности, при соответствующей перестановке членов условно сходящегося ряда можно превратить его в расходящийся ряд.

Абсолютно сходящиеся ряды с суммами S_1 и S_2 можно почленно складывать (вычитать). В результате получается абсолютно сходящийся ряд, сумма которого $S = S_1 + S_2 \quad (S = S_1 - S_2)$.

Если ряды $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ и $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots$ сходятся абсолютно и имеют соответственно суммы S_1 и S_2, то сходится абсолютно и ряд $u_1v_1 + (u_1v_2 + v_1u_2) + (u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1) + \ldots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \ldots + u_nv_1) + \ldots$

Этот ряд называется произведением двух абсолютно сходящихся рядов с суммами S_1 и S_2. Он абсолютно сходится, и его сумма равна S_1S_2.

Пример 1. Дан общий член ряда $u_n = \dfrac{n}{10^n + 1}$. Написать первые четыре члена ряда.

Решение.

Если $n = 1$, то $u_1 = \dfrac{1}{11}$; если $n = 2$, то $u_2 = \dfrac{2}{101}$; если $n = 3$, то $u_3 = \dfrac{3}{1001}$; если $n = 4$, то $u_4 = \dfrac{4}{10001}$; … Ряд можно записать в виде

$$\frac{1}{11} + \frac{2}{101} + \frac{3}{1001} + \frac{4}{10001} + \ldots$$

Пример 2. Найти общий член ряда $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \dfrac{7}{2^4} + \ldots$

Решение.

Числители образуют арифметическую прогрессию 1, 3, 5, 7, …; n-й член прогрессии находим по формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$. Здесь $a_1 = 1$, $d = 2$, поэтому $a_n = 2n - 1$. Знаменатели образуют геометрическую прогрессию $2,\ \ 2^2,\ \ 2^3,\ \ldots;$ n-й член этой прогрессии $b_n = 2^n$. Следовательно, общий член ряда $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.

Вообще нужно иметь в виду, что несколько первых членов ряда полностью ряд не определяют.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots$$

Решение.

Данный ряд составлен из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и поэтому сходится. Найдем его сумму. Здесь $b_1 = \dfrac{2}{3}$, $q = \dfrac{1}{2}$ (знаменатель прогрессии). Следовательно,

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{2/3}{1-1/2} = \frac{4}{3}.$$

Пример 4. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (обобщенный гармонический ряд).

Решение.

Воспользуемся интегральным признаком сходимости знакоположительных рядов.

Исследуем на сходимость несобственный интеграл.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x^{\alpha}}dx = \lim_{b\to+\infty}\begin{cases} \ln|x|\Big|_1^b, & \text{если } \alpha = 1 \\ \dfrac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Big|_1^b, & \text{если } \alpha \neq 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & \text{если } \alpha = 1 \\ +\infty, & \text{если } 1-\alpha > 0 \\ \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{если } 1-\alpha < 0 \end{cases} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \alpha \leq 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{если } \alpha > 1 \end{cases}$$

Итак: $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^{\alpha}}dx$ сходится, если $\alpha > 1$; расходится, если $\alpha \leq 1$.

Согласно интегральному признаку сходимости, знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Если $\alpha = 1$, расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ имеет специальное название – гармонический.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда

$$0,6 + 0,51 + 0,501 + \ldots + \left[0,5 + (0,1)^n\right] + \ldots$$

Решение.

Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,5 \neq 0$ и ряд расходится.

Пример 6. Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{3n-1} + \ldots$

Решение.

Сравним ряд с расходящимся гармоническим рядом, у которого $v_n = \frac{1}{n}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}$. Следовательно, исходный ряд расходится (по признаку сравнения).

Пример 7. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \ldots.$$

Решение.

Здесь удобно применить признак Коши, поскольку $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{2n+1}$, а предел последней дроби находится просто:

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 + 1/n} = \frac{1}{2}.$$

Так как $C = \frac{1}{2} < 1$, то данный ряд сходится (по признаку Коши).

Пример 8. Исследовать сходимость ряда $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \ldots + \frac{2^n}{n^{10}} + \ldots$

Решение.

Применим признак Д'Аламбера; имеем $u_n = \frac{2^n}{n^{10}}$, $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n^{10}}{(n+1)^{10}}$; значит, $D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^{10}}{(n+1)^{10}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10}} = 2$.

Так как $D = 2 > 1$, то исходный ряд расходится.

Пример 9. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} + \ldots$$