Министерство образования и науки РФ ГОУ ВПО
Российский государственный торгово-экономический университет
Казанский институт

Кафедра информатики и высшей математики

ТАЛЫЗИН В.А.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Руководство для выполнения контрольной работы

Учебно-методическое пособие

КАЗАНЬ-2013г.

УДК 519.2(075.8)

ББК 22.171я73-1+22.172я73-1

Т

Рекомендовано учебно-методическим советом Казанского института Российского государственного торгово-экономического университета

Рецензенты:

В.И. Заботин - зав. кафедрой математики Университета Управления ТИСБИ, профессор, д.т.н.

Л.Г. Амбарцумов – доцент, к.т.н. кафедры прикладной математики и информатики КНИТУ-КАИ им. А.Н. Туполева.

Талызин В.А.

Теория вероятностей и математическая статистика. Руководство для выполнения контрольной работы: учебно-методическое пособие. – Казань: Редакционно-издательский центр, 2013. - с.

Пособие является методическим руководством для выполнения контрольной работы по теории вероятностей и математической статистике студентами заочной формы обучения.

Оно охватывает основные разделы начального курса теории вероятностей и математической статистики для студентов экономических специальностей: случайные события, случайные величины, случайные векторы, вариационные ряды, статистическое оценивание параметров, статистическую проверку гипотез, корреляционный анализ.

Каждый раздел содержит необходимые теоретические сведения, необходимые расчетные формулы, подробное решение типовой тестовой задачи и задания для самостоятельной работы.

Тема 1. Теория вероятностей

1. Случайные события

1.1. Комбинаторика

Комбинаторика рассматривает вопросы, связанные с подсчетом числа возможных комбинаций из элементов данного конечного множества.

Перестановки P_n – комбинации, состоящие из одних и тех же n элементов и отличающиеся только *порядком* их расположения.

Если все n элементов различны, то число перестановок *без повторений* определяется формулой

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!. \tag{1}$$

Если среди n элементов имеются p элементов одного вида, q - другого, r - третьего и т. д., то число всех перестановок *с повторениями* определяется из выражения

$$P_n(p,q,r,\ldots) = \frac{n!}{p!\,q!\,r!\ldots} \tag{2}$$

Пример 1. Порядок выступления семи участников конкурса определяется жребием. Сколько вариантов жеребьёвки при этом возможно?

Решение. Каждый вариант жеребьёвки отличается только порядком участников конкурса, т.е. является перестановкой без повторений из семи элементов:

$$P_7 = 7! = 5040.$$

Пример 2. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «ананас»?

Решение. В слове «ананас» шесть букв, причем буква «а» повторяется три раза, а буква «н» - два раза. Следовательно, это будут перестановки из шести элементов с повторениями:

$$P_6(3,2) = \frac{6!}{3!2!} = 60.$$

Размещения A_n^k *из* n *элементов по* k *элементов* – это комбинации, составленные из n данных элементов по k элементов в каждой; причем два размещения считаются различными, если они отличаются, либо элементами, либо их порядком.

Если среди n элементов нет одинаковых и повторение одного и того же элемента не допускается, то число размещений *без повторений* определяется формулой:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\,. \tag{3}$$

Если все n элементов различны, но в размещениях допускаются повторения, то число размещений *с повторениями* находится:

$$\overline{A}_n^k = n^k\,. \tag{4}$$

Пример 3. В студенческой группе 30 человек. Необходимо выбрать старосту, его заместителя и профорга. Сколькими способами можно это сделать?

Решение. Из 30 человек требуется выбрать трёх – старосту, заместителя и профорга. Комбинации будут отличаться как составом элементов, так и их порядком, т.е. это будут размещения из 30 элементов по три без повторений (один студент не может быть одновременно и старостой, и, скажем, профоргом). Отсюда

$$A_{30}^{3} = \frac{30!}{27!} = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360.$$

Пример 4. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 фильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены различные призы?

Решение. Каждый из вариантов распределения призов представляет комбинацию пяти фильмов из 10, отличающихся от других комбинаций, как составом фильмов, так и их порядком по номинациям. При этом одни и те же фильмы могут повторяться (один фильм может получить призы по нескольким номинациям). Следовательно, это будут размещения с повторениями из 10 элементов по пять:

$$\overline{A}_{10}^{5} = 10^{5} = 100\ 000.$$

Сочетания C_n^k из n элементов по k элементов - это комбинации по k элементов из данных n, отличающиеся одна от другой хотя бы одним элементом.

Для k различных элементов из n различных элементов верна формула:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (5)$$

Если k элементов повторяются, то число сочетаний с повторениями определяется из выражения:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \qquad (6)$$

Пример 5. В лотерее «Спортлото» требуется угадать 6 номеров из 49. Сколькими способами можно выбрать 6 номеров?

Решение. Каждая комбинация из 6 номеров отличается только составом, порядок номеров не имеет значения. Поэтому число способов определяется числом сочетаний без повторения из 49 элементов по шесть:

$$C_{49}^{6} = \frac{49!}{6!43!} = 13\ 983\ 816.$$

Пример 6. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 фильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены одинаковые призы?

Решение. В этом случае порядок следования фильмов в комбинации 5 призёров значения не имеет, и число вариантов представляет собой число сочетаний с повторениями из 10 элементов по пять:

$$\overline{C}_{10}^{5} = C_{10+5-1}^{5} = C_{14}^{5} = \frac{14!}{5!9!} = 2002.$$

Правило произведения. Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно вы-

ŋqdbɐeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɐ Ɉqdbɏqɐè

брать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

Пример 7. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную букву из слова «здание»?

Решение. В слове «здание» три гласных и три согласных буквы. Одну гласную букву можно выбрать C_3^1 способами, столькими же способами можно выбрать согласную. Отсюда искомое число способов найдется по правилу произведения:

$$C_3^1 \cdot C_3^1 = 2 \cdot \frac{3!}{1!2!} = 9.$$

Правило суммы. Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать, либо A, либо B можно $(n+m)$ способами.

Пример 8. В коробке 10 красных, 3 синих и 7 жёлтых карандашей. Сколькими способами можно вынуть три карандаша одного цвета?

Решение. Три карандаша красного цвета можно выбрать C_{10}^3 способами, три карандаша синего цвета - C_3^3 способами, наконец, три карандаша жёлтого цвета - C_7^3 способами. Нужное число способов найдется по правилу суммы:

$$C_{10}^3 + C_3^3 + C_7^3 = 120+1+35=156.$$

Задачи для самостоятельной работы

Таблица 1

№ варианта	Задание
1	Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова "студент"?
2	В сейфе установлен секретный замок, который содержит 6 дисков. Число букв на каждом диске равно 10. Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающим кода и подбирающим его наудачу?
3	В лотерее "Спортлото" требуется угадать 6 номеров из 49. Найти число человек, которые угадают 3 номера из 6.
4	В группе 30 человек. Необходимо выбрать старосту, его заместителя и профорга. Сколько существует способов это сделать?
5	Расписание одного дня состоит из 4 уроков. Определить число вариантов расписания при выборе из 10 дисциплин.
6	Порядок выступления 9 участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?
7	Сколько существует пятизначных чисел, состоящих из цифр 3,4 и 5, в которых цифра 4 повторяется 3 раза, а цифра 5 – 2 раза?
8	Сколькими способами можно сделать трёхцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется 6 различных цветов материи?
9	На школьном вечере присутствует 12 девушек и 15 юношей. Сколь-