

Ä

DIE ELEMENTE
DER
PROJECTIVISCHEN GEOMETRIE

IN SYNTHETISCHER BEHANDLUNG.

VORLESUNGEN

VON

DR. HERMANN HANKEL,

WEIL. ORD. PROF. DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT ZU TÜBINGEN.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1875.

V o r w o r t.

Das vorliegende Werk, welches dem Studium der projectivischen Geometrie als Einleitung in die Elemente dienen soll, ist den hinterlassenen Schriften des früh verstorbenen Mathematikers, Prof. Dr. Hermann Hankel, entnommen und bildet den im Wesentlichen unveränderten Abdruck eines Heftes, welches der Verfasser für seine Vorlesungen zuletzt an der Universität Tübingen ausgearbeitet hatte.

Es wird dem Unterzeichneten, dem die Herausgabe anvertraut wurde, gestattet sein, Plan und Umfang des Werkes in Kürze darzulegen. Dabei sollen vor allem die Erwägungen hervortreten, welche, für den Entschluss einer Veröffentlichung massgebend, die Ueberzeugung begründeten, dass eine eigenartige Leistung hier vorliege, die als Ergebniss eingehender Studien zwar nicht neue Methoden des Beweisganges liefere, wohl aber durch die systematisch correcte und dabei fesselnde Darstellung in besonderer Weise den Zweck erfülle, gerade beim Beginne des Studiums das Interesse für die behandelte Disciplin anzuregen und zu vertiefen.

In allen Schriften, durch welche Hankel während der kurzen Wirksamkeit, die ihm beschieden war, die mathematische Wissenschaft bereicherte, ist der Gedanke zu durchgreifender Geltung gekommen, aus dem empirischen Detail die leitenden Principien herauszuheben, welche zur Einheit die Einzelheiten zusammenfassen; und aus der geschichtlichen Einleitung, die dem Folgenden vorangestellt ist, wird von neuem ersichtlich, wie tief er die Bedeutsamkeit der Ausbildung allgemeiner Principien auch in den Fortschritten der Geometrie zu erkennen wusste. Die neuere Geometrie innerhalb ihrer Grenzen schien ihm,

wie er es an einer anderen Stelle bezeichnet*), „das Ideal einer Wissenschaft beinahe erreicht zu haben“, und sein Interesse an der organischen Gliederung derselben hat in den nunmehr veröffentlichten Vorlesungen beredten Ausdruck gefunden. So werden diese auch als Lehrbuch zu dienen vor allem dadurch geeignet sein, dass sie von vornherein bestrebt sind, dem Leser die umfassenden Gedanken der grossen Geometer nahe zu bringen, durch welche die systematische Abhängigkeit der geometrischen Gestalten in ihren einfachsten Grundbeziehungen aufgedeckt ist. Dabei suchen die Vorlesungen einen klaren Ueberblick über die verschiedenartigen Methoden zu gewähren, welche zur Ausbildung der „neueren“ Geometrie in ihrer jetzigen Gestaltung geführt haben, und es muss insbesondere hervorgehoben werden, dass auch das von Poncelet begründete Verfahren der Projection, welches gegenwärtig in den Lehrbüchern der synthetischen Geometrie allzusehr zurücktritt, in den vorliegenden Entwicklungen als dienliches Hilfsmittel vielfach angewandt ist.

Wenn so die Einheit des geometrischen Gedankens gerade durch die Beherrschung vielseitiger Methoden bekundet wird, so wollen die Vorlesungen auch den Zusammenhang gewahrt wissen, in welchem die Geometrie der Alten mit der neueren Geometrie steht. In der historischen Einleitung sowohl wie in der systematischen Entwicklung selber sind daher die einzelnen Probleme gekennzeichnet, in denen sich die Forschungen der Alten mit den späteren Ergebnissen berühren, und der Vergleich der neuen Methoden mit den früheren soll ihre Einheit und Fruchtbarkeit erkennen lassen. Um dieses allgemeinen Zweckes willen sind in dem vierten Abschnitte die Aufgaben des Apollonius aufgenommen, die auf die einfachsten Principien der neueren Geometrie zurückgeführt werden.

Als systematisch vollständig durchgearbeitet werden vor allem der erste und dritte Abschnitt zu bezeichnen sein, welche die Theorie des Doppelverhältnisses und

*) „Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten.“ Ein Vortrag, Tübingen 1869.

der Transversalen, sowie die projectivischen Eigenschaften der Punktreihen und Strahlbüschel umfassen. Zuvörderst bildet die Theorie der Transversalen den eigentlichen Ausgang und die Grundlage aller folgenden Untersuchungen, die damit auf die Werke von Poncelet, Möbius und Chasles zurückgehen. Nachdem sodann im zweiten Abschnitte eine vorläufige Feststellung des Begriffes von Pol und Polare gegeben und im Anschlusse daran das allgemeine Princip der Dualität und die Anwendung der polaren Reciprocität auf projectivische und nicht projectivische Beziehungen auseinander gesetzt ist, behandelt der dritte Abschnitt die Eigenschaften der geometrischen Grundgebilde, der geraden Punktreihe und des ebenen Strahlbüschels, wesentlich auf Grund der von Steiner entdeckten Principien. Die hiermit gewonnenen Anschauungen über die Eigenschaften auf einander liegender, projectivischer Gebilde sind in dem fünften Abschnitte zu einer Darstellung der Lehre von den dioptrischen Bildern verwerthet. Die Aufnahme dieses Capitels in ein Lehrbuch der Geometrie wird als glücklicher Griff erscheinen, nachdem diese Theorie, insonderheit durch die Arbeiten von Möbius, einer so rein geometrischen Behandlung fähig geworden ist, dass sie nun selber dem Geometer zu weiteren Problemen Anlass gibt.

Die Theorie der Kegelschnitte, als der Erzeugnisse projectivischer Gebilde, geht in der Darstellung des sechsten Abschnittes zunächst auf die Poncelet'schen Anschauungen zurück, folgt aber schliesslich den Steiner'schen Gedanken, zum Theil in den Erweiterungen und Ausführungen, welche dieselben durch die späteren Arbeiten gewonnen haben. Die eingehendere Behandlung des Pascal'schen Theoremes im §. 6 glaubte ich an dieser Stelle, wiewohl sie den Gang der Untersuchung unterbricht, belassen zu müssen, weil sie eine grosse Fülle der hierauf bezüglichen schönen Sätze in verhältnissmässig kurzer Entwicklung hervortreten lässt. Die besonderen Fälle der allgemeinen projectivischen Beziehung, wie sie in den Eigenschaften der conjugirten Durchmesser und speciell der Kegelschnittaxen zur Geltung kommen, sind noch im §. 12 hervorgehoben; da-