Предисловие

В условиях рыночной экономики существует высокая степень неопределенности экономического поведения субъектов рынка. Разработка и осуществление эффективных управленческих решений, на основе оценки возможных в будущем ситуаций и выбора из нескольких альтернативных вариантов решений, является важнейшей предпосылкой обеспечения конкурентоспособности выпускаемой продукции, осуществления обоснованной кадровой политики и рационализации других сторон деятельности организации. В связи с чем, дисциплина «Методы оптимальных решений» является важной составляющей системы фундаментальной подготовки современного экономиста, обеспечивающей ему профессиональную мобильность.

Предлагаемое учебное пособие подготовлено в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования и программой курса «Методы оптимальных решений» для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 080100.62 «Экономика».

Цель пособия – повышение уровня математической подготовки студентов, усвоение знаний и формирование навыков в области использования оптимизационных моделей для принятия экономически целесообразных управленческих решений в различных ситуациях.

В результате изучения данного пособия студент должен: знать типы экономических задач, решаемых с помощью методов оптимальных решений, основные математические методы анализа принятия решений; уметь перейти от прикладной экономической задачи к математической модели, выбирать рациональные варианты действий в практических задачах принятия решений; владеть методами построения математических моделей типовых профессиональных задач. Материал книги направлен на формирование у студентов следующих профессиональных компетенций: способности осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных экономических задач (ПК-4); способности выбирать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, анализировать результаты расчетов и обосновывать полученные выводы (ПК-5); способности на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты (ПК-6).

Пособие состоит из 4 разделов, охватывающих методы линейного, динамического и выпуклого программирования, элементы теории графов и матричных игр.

Каждый раздел пособия содержит основные положения теории, формулы, определения, теоремы, необходимые для решения задач. Поскольку выпускники вузов по экономическим специальностям в будущей профессиональной деятельности будут встречаться с математическими методами оптимизации главным образом как пользователи, а не разработчики, в данном пособии основное внимание уделяется приложениям математических методов в экономике, а не их подробному теоретическому обоснованию. В книге приводятся подробные решения типовых задач различной степени трудности, поясняющих теоретический материал; большое (достаточное) количество содержательных примеров, иллюстрирующих приемы математического моделирования экономических ситуаций с последующим анализом полученных результатов; вопросы для самоконтроля и задачи для самостоятельного решения, позволяющие закрепить приобретенные на практических занятиях навыки решения задач и оценить степень подготовленности по данной теме.

Материалы пособия имеют прикладную направленность и найдут конкретное применение в общепрофессиональных и специальных дисциплинах, посвященных микро- и макроэкономике, государственному управлению и экономике общественного сектора, фондовому рынку и финансовому менеджменту, институциональной экономике и ряду других научных областей.

ŋqdqɏeɎ bɆ dəbɆbɎɜe b ɛɑɑbɕɏ ɈqqdɎqɏè

1. Линейное программирование

1.1. Математическая модель задачи линейного программирования

Задача линейного программирования (ЗЛП) в *общем виде* формулируется следующим образом: найти условный экстремум (максимум или минимум) линейной целевой функции n переменных

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min) \qquad (1)$$

и соответствующие ему переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие системе *линейных ограничений*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n (\leq, =, \geq) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n (\leq, =, \geq) b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n (\leq, =, \geq) b_m, \end{cases} \qquad (2)$$

где коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$; $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – заданные числа, а величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные. Каждое из ограничений системы – одно из трех возможных ($\leq, =, \geq$).

Совокупность целевой функции (1) и системы ограничений (2) называется *математической моделью* ЗЛП.

Любой набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющий системе ограничений (2), называется *допустимым решением* ЗЛП.

Допустимое решение, на котором достигается требуемый экстремум целевой функции (1), называется *оптимальным решением* ЗЛП.

Множество всех допустимых решений ЗЛП называется *областью допустимых решений* (ОДР).

Общая ЗЛП допускает ограничения всех видов и уравнения, и неравенства.

В том случае, когда все переменные неотрицательны ($x_i \geq 0$, $j = \overline{1, n}$), а система ограничений (2) состоит только из неравенств, ЗЛП называется *стандартной*.

ŋqdqyeY bƐ dəqƐbYзə d cəabəɣ Ɉqdqɣqyè

Стандартная модель ЗЛП на максимум	Стандартная модель ЗЛП на минимум
$f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to\max$ $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\le b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\le b_m, \\ x_j\ge 0 \quad j=\overline{1,n} \end{cases}$	$f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to\min$ $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\ge b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\ge b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\ge b_m, \\ x_j\ge 0 \quad j=\overline{1,n} \end{cases}$

Если все ограничения системы заданы уравнениями, и все переменные удовлетворяют условию неотрицательности ($x_j\ge 0$, $j=\overline{1,n}$) ЗЛП называют ***канонической.***

Каноническая форма ЗЛП в координатной форме имеет вид:

$$f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to\max(\min),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \qquad (3)$$

$$x_j\ge 0 \quad j=\overline{1,n},$$

или с использованием знак суммирования

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max \quad (\min),$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \qquad i=\overline{1,m}, \qquad (4)$$

$$x_j\ge 0,$$

в матричной записи

$$f(x)=C\cdot X\to\max \quad (\min),$$

$$A\cdot X\le B, \qquad (5)$$

$$X\ge 0,$$

где $C=(c_1,c_2,...,c_n)$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Общую и стандартную ЗЛП всегда можно представить в каноническом виде. Для чего неравенства преобразуют в равенства путем введения *дополнительных* (балансовых, выравнивающих) переменных. В линейное неравенство вида $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n\le b$ дополнительная неотрицательная переменная x_{n+1} вводится со знаком «+»:

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n+x_{n+1}=b,$$

в неравенство-ограничение вида $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n\ge b$, со знаком «–»:

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n-x_{n+1}=b.$$

Дополнительные переменные вводятся в целевую функцию с нулевыми коэффициентами и поэтому не влияют на ее значение.

Пример 1. Привести ЗЛП к каноническому виду

$$f(x)=3x_1+5x_2\to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 9, \\ 3x_1+2x_2\le 13, \\ x_1-5x_2\ge 20, \end{cases}$$

$$x_1,x_2\ge 0.$$

Решение. В левые части первого и второго ограничений-неравенств типа «$\le$» вводим соответственно дополнительные неотрицательные переменные x_3 и x_4 со знаком «+», а в левую часть третьего ограничения-неравенства типа «$\ge$» дополнительную неотрицательную переменную x_5 со знаком «–». В целевую функцию дополнительные переменные x_3, x_4, x_5 входят с коэффициентом ноль. Получаем

$$f(x)=3x_1+5x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4+0\cdot x_5\to \max,$$

ŋqdqyɐʎ bɆ dɐdɆbʎзɐ d ɕɔɑbɔʎ Ɉqddʎqyè

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 13, \\ x_1 - 5x_2 - x_5 = 20, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,5}.$$

В случае, когда задача имеет произвольно изменяющиеся переменные, любую такую переменную заменяют разностью двух неотрицательных переменных, т.е. $x_j = x'_j - x''_j$, где $x'_j \ge 0$, $x'' \ge 0$.

Пример 2. Привести к каноническому виду следующую ЗЛП:

$$f(x) = -3x_1 - 5x_2 - 6x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 \le 12, \\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 \le 17, \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \ge 15, \end{cases}$$

$$x_1, x_3 \ge 0.$$

Решение. Так как переменная x_2 может принимать любые значения, как положительные, так и отрицательные представим ее как разность двух неотрицательных переменных, которые обозначим x_3 и x_4, $x_2 = x_3 - x_4$. Переменную x_3 теперь будем обозначать через x_2.

Преобразуем первые два ограничения вида «$\le$» в равенства, прибавив к их левым частям дополнительные неотрицательные переменные x_5 и x_6 и третье неравенства вида «$\le$», вычитая из левой части дополнительную неотрицательную переменную x_7. Дополнительные переменные x_5, x_6, x_7 входят в целевую функцию с нулевыми коэффициентами. В результате указанных преобразований ЗЛП примет вид:

$$f(x) = -3x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 5x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 5x_4 + x_5 = 12, \\ 3x_1 + 10x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_6 = 17, \\ -4x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 3x_4 - x_7 = 15, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,7}.$$

Если $X = (d_1, d_2, ..., d_n)$ – оптимальное решение полученной

ЗЛП, то оптимальное решение исходной ЗЛП следующее: $x_1 = d_1$, $x_2 = d_3 - d_4$, $x_3 = d_2$.

Примечание. Иногда возникает необходимость перейти от задачи нахождения минимума к нахождению максимума и наоборот. Для этого достаточно изменить знаки всех коэффициентов целевой функции на противоположные, а в остальном задачу оставить без изменений. Оптимальные решения полученных таким образом задач на максимум и минимум совпадают, а значения целевых функций при оптимальных решениях отличаются только знаком.

Рассмотрим примеры построения математических моделей ЗЛП.

Пример 3. Задача об использовании ресурсов. Для изготовления двух видов продукции P_1, P_2 используют три вида сырья: S_1, S_2, S_3. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации единицы продукции, приведены в таблице 1.

Таблица 1

Вид сырья	Запас сырья	Кол-во единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции	
		P_1	P_2
S_1	20	2	5
S_2	40	8	5
S_3	30	5	6
Прибыль от единицы продукции, в руб.		50	40

Необходимо составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Решение. Обозначим x_1, x_2 – соответственно количество единиц продукции P_1, P_2 запланированных к производству. Для их изготовления потребуется $(2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$ единиц ресурса S_1, $(8 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2)$ единиц ресурса S_2, $(5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2)$ единиц ресурса S_3. Так как потребление ресурсов S_1, S_2, S_3 не должно превышать их запасов, соответственно 20, 40 и 30 ед., то связь между потреблением ресурсами и их запасами выражается системой неравенств:

ŋqdqaеY bЕ dеdЕbYзе d ɛɔɑбɔɤ Ɉqddүqaè

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30. \end{cases}$$

Если продукция P_1 не выпускается, то $x_1 = 0$, в противном случае $x_1 > 0$. То же самое получаем и для продукции P_2. Таким образом, на неизвестные x_1 и x_2 должны быть наложены условия неотрицательности: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Конечную цель задачи – получение максимальной прибыли при реализации продукции – выразим как функцию двух переменных x_1 и x_2. Реализация x_1 единиц продукции вида P_1 и x_2 единиц продукции вида P_2 дает соответственно $50\,x_1$ и $40\,x_2$ руб. прибыли, суммарная прибыль составит $f(x) = 50x_1 + 40x_2$ (руб.).

Итак, экономико-математическая модель задачи: необходимо найти такие неотрицательные значения x_1 и x_2, при которых линейная функция $f(x) = 50x_1 + 40x_2$ достигает максимального значения при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30. \end{cases}$$

Задачу легко обобщить на случай выпуска n видов продукции с использованием m видов ресурсов.

Обозначим x_j $(j = \overline{1, n})$ – число единиц продукции P_j, запланированной к производству; $b_i\,(i = \overline{1, m})$ – запас ресурса S_i, a_{ij} – число единиц ресурса S_i, затрачиваемого на изготовление единицы продукции P_j; c_j – прибыль от реализации единицы продукции P_j.

Тогда экономико-математическая модель задачи об использовании ресурсов в общей постановке примет вид: найти такой план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выпуска продукции, удовлетворяющий системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{6}$$

и условию неотрицательности

$$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,n}), \tag{7}$$

при котором функция

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \tag{8}$$

принимает максимальное значение.

Пример 4. Задача составления рациона. Имеется два вида корма I и II, содержащие питательные вещества S_1, S_2, S_3. При откорме каждое животное ежедневно должно получить не менее 9 ед. питательного вещества S_1, 8 ед. вещества S_2, 12 ед. вещества S_3. Стоимость 1 кг корма I составляет 4 ед., корма II – 6 ед. Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма приведены в таблице 2.

Таблица 2

Питательные вещества	Кол-во единиц питательных веществ в 1 кг корма	
	корм I	корм II
S_1	3	1
S_2	1	2
S_3	1	6

Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела.

Решение. Для составления экономико-математической модели обозначим x_1 и x_2 соответственно количество кормов I и II, входящих в дневной рацион животных. Принимая во внимание значения, приведенные в таблице 2, и условие, что дневной рацион удовлетворяет требуемой питательности только в случае, если количество единиц питательных веществ не меньше предусмотренного, получаем систему ограничений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9, \\ x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + 6x_2 \ge 12. \end{cases}$$

ŋqdqʎeɣ bɆ dəqɆbʎɜə d ɐɔəqɔʎ ɟqdqʎqɐè

По смыслу задачи переменные $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Общую стоимость рациона можно выразить в виде линейной функции $f(x) = 4x_1 + 6x_2$ (ед.).

Итак, экономико-математическая модель задачи: необходимо найти значения x_1 и x_2, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \end{cases}$$

условиям $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, при которых линейная функции $f(x) = 4x_1 + 6x_2$ принимает минимальное значение.

Пример 5. Предприятие располагает тремя видами сырья и может выпускать одну и ту же продукцию двумя способами. Запасы сырья составляют 100, 100, 90 кг соответственно. За 1 ч работы первым способом выпускается 20 ед., вторым – 30 ед. продукции. Количество сырья (кг) того или иного вида, расходуемого за 1 ч при различных способах производства приведены в таблице 3.

Таблица 3

Способ производства	Сырье		
	1	2	3
Первый	10	20	15
Второй	20	10	15

Требуется найти план производства, при котором будет выпущено наибольшее количество продукции.

Решение. Обозначим x_1 и x_2 время (час) использования соответственно первого и второго способов производства. Исходя из условий задачи, составляем систему ограничений.

Формулируем экономико-математическую модель задачи: найти такое решение x_1 и x_2, удовлетворяющее системе

$$\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 \leq 100, \\ 20x_1 + 10x_2 \leq 100, \\ 15x_1 + 15x_2 \leq 90, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{cases}$$

при которых функция $f(x) = 20x_1 + 30x_2$ принимает максимальное значение.