



**Горев Павел Михайлович,**

кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа и методики обучения математике ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров

[pavel-gorev@mail.ru](mailto:pavel-gorev@mail.ru)

**Сорокина Анастасия Владимировна,**

студентка V курса факультета информатики, математики и физики ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров

[vesnasky@mail.ru](mailto:vesnasky@mail.ru)

## Признаки равенства треугольников как задача открытого типа при изучении геометрии в основной школе

**Аннотация.** В статье описывается возможность построения системы геометрических задач (а именно признаков равенства треугольников) на основе рассмотрения учебной задачи открытого типа, подводящей к творческому осмысленному восприятию материала и способствующей развитию критического мышления учащихся.

**Ключевые слова:** обучение геометрии, задачи открытого типа, проблемное обучение, развивающее обучение, развитие критического мышления.

Развитие личности с высоким уровнем интеллекта, мощным творческим потенциалом, способной раскрыть их в своей профессиональной деятельности – одна из наиболее важных и приоритетных задач обновляющейся школы. Математическое образование в силу специфичности своего предмета в значительной степени позволяет формировать интеллект учащихся и имеет широкий, но недостаточно большой потенциал для развития их творческих способностей [1, 2].

Одним из направлений в решении проблемы развития научного творчества школьников при обучении математике может стать включение в изучаемый материал задач открытого типа как эффективного средства развития креативности учащихся основной и средней школы [3–5]. Такие задачи не регламентируют четких условия, рассуждений и выводов: предложенное решение либо применимо к условию и приводит к требуемому результату, либо нет. Задачи открытого типа чаще всего встречаются в практической деятельности, поэтому школьный курс математики должен целенаправленно способствовать формированию у учеников умения их решать [6].

Именно поэтому особое значение приобретает исследовательская работа по выявлению возможностей использования таких задач в процессе изучения школьного курса математики, а также созданию систем таких задач и методики работы с ними в соответствии с действующим обновленным федеральным стандартом математического образования школьников.

Приведем пример открытой задачи математической направленности.

**Задача 1.** Как убедиться, что два предлагаемых куска ткани одинаковы?

Конечно, на практике такая задача, скорее всего, будет решена простым наложением одного куска на другой, что, в общем-то, естественно как с позиций геометрии, так и с позиций практики, но не несет должного образовательного эффекта.

Поэтому формулировка такой открытой задачи требует внесения изменений, что сузит степени открытости, но повысит ее образовательную составляющую [7].

**Задача 2.** Как убедиться, что две фигуры, не доступные для практических действий с ними (вырезание, накладывание и т. п.), равны?



Задача, оставаясь открытой, теперь уже требует применения геометрических соображений практического (измерение длин отрезков и величин углов, сопоставление и т. п.) или теоретического (доказательство) характера. Сузим требования задачи до простейших геометрических фигур – треугольников.

**Задача 3.** Как убедиться, не прибегая к практическим действиям, что два треугольника равны?

Эта задача открытого типа уже может быть включена в процесс изучения темы «Признаки равенства треугольников» в 7 классе основной школы и, после соответствующей переформулировки, следующей далее, может использоваться при изучении трех наиболее известных (основных) признаков равенства треугольников [8].

**Задача 4.** Укажите и докажите возможные признаки равенства треугольников.

Это учебная задача, носящая признаки открытости. Так, отрывком является условие задачи – неясно, какие элементы можно использовать; ее решение тоже может быть осуществлено разными способами; да и выводы могут быть разнообразны.

Обсудим более подробно открытость условия задачи.

Условимся для начала называть элементами треугольника его стороны и углы. Каждый из трех основных признаков равенства треугольников позволяет сделать вывод о равенстве двух треугольников, если установлено, что три элемента одного треугольника (хотя бы один из которых – линейный) соответственно равны трем элементам другого треугольника. В первом признаке такими элементами являются две стороны и угол между ними, во втором – сторона и два прилежащих к ней угла, в третьем – три стороны. Возникает естественный вопрос: а будут ли равны два треугольника, если какие-то иные три элемента одного из них равны соответствующим элементам другого? Иначе говоря, есть ли другие признаки равенства двух треугольников по трем элементам?

Сначала перечислим, какие еще есть возможности. Если взять в качестве исследуемых элементов одну сторону и два угла, то они оба могут быть прилежащими к этой стороне (такой случай рассматривается во втором признаке равенства треугольников), а может быть и другой вариант: один из углов является прилежащим, а другой – противолежащим. Таким образом, возможен признак равенства треугольников по стороне и двум углам, один из которых является прилежащим, а другой – противолежащим для этой стороны. Далее, если рассматривать две стороны и угол, то он может быть заключен между этими сторонами (такой случай рассматривается в первом признаке равенства треугольников), а может быть противолежащим одной из сторон. Тем самым, возникает вопрос о признаке равенства треугольников по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них. И, наконец, в качестве трех элементов треугольника можно взять три угла и рассмотреть вопрос о признаке равенства треугольников по трем углам. Напомним, что рассмотрение в качестве элементов трех сторон составляют третий из основных признаков равенства треугольников.

Итак, есть три возможности. Осталось выяснить какие из них, являясь верными фактами, дают «новые» признаки равенства треугольников.

**Гипотеза 1.** Если сторона и два угла (прилежащий и противолежащий для этой стороны) одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам (прилежащему и противолежащему для этой стороны) другого треугольника, то такие треугольники равны.

Попробуем доказать, что эта гипотеза верна, попутно показав два из многих возможных вариантов доказательства, что дает представление об открытости процесса решения задачи.



**Доказательство 1.** Рассмотрим треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , у которых  $AB = A_1B_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$ . Мы хотим доказать, что эти треугольники равны. Мысленно наложим треугольник  $ABC$  на треугольник  $A_1B_1C_1$  так, чтобы вершина  $A$  совместилась с вершиной  $A_1$ , а стороны  $AB$  и  $AC$  наложились на лучи  $A_1B_1$  и  $A_1C_1$ . Это можно сделать, т. к.  $\angle A = \angle A_1$ . Поскольку  $AB = A_1B_1$ , то сторона  $AB$  совместится со стороной  $A_1B_1$ , в частности, совместятся вершины  $B$  и  $B_1$ . Остается доказать, что вершины  $C$  и  $C_1$  так же совместятся. Если предположить, что вершина  $C$  совместится не с точкой  $C_1$ , а с какой-то другой точкой  $C_2$  на луче  $A_1C_1$ , то получится треугольник  $B_1C_1C_2$ , у которого внешний угол при равен углу треугольника, не смежному с этим внешним углом. Но этого не может быть (точнее может быть лишь в случае, если угол  $B_1$  этого треугольника нулевой), поэтому вершина  $C$  совместится с вершиной  $C_1$ . Следовательно, совместятся и стороны  $BC$  и  $B_1C_1$ . Итак, треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  полностью совместятся, а значит, они равны.

**Доказательство 2** будем основывать на уже известном втором признаке равенства треугольников. Пусть вновь даны треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , у которых  $AB = A_1B_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$ . В силу того, что сумма углов треугольника неизменна и равна  $180^\circ$  и у треугольников есть две пары равных углов, то и третья пара составит равные углы ( $\angle B = \angle B_1$ ). Следовательно, в каждом треугольнике есть по стороне и паре прилежащих к ней углов находящихся в соответственном равенстве ( $AB = A_1B_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ), что доказывает равенство самих треугольников.

Таким образом, наша гипотеза оказалась верной и имеет место еще один признак равенства треугольников.

**Четвертый<sup>1</sup> признак равенства треугольников.** Если сторона и два угла (прилежащий и противолежащий для этой стороны) одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам (прилежащему и противолежащему для этой стороны) другого треугольника, то такие треугольники равны.

Заметим, что признаки треугольников, обозначенные у нас под номерами два и четыре можно объединить и рассматривать обобщенный признак.

**Теорема (признак равенства треугольников).** Если сторона и два угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Однако вернемся к рассмотрению заявленных возможностей равенства элементов двух треугольников.

**Гипотеза 2.** Если две стороны и угол, противолежащий одной из этих сторон, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

**Доказательство.** Рассмотрим треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , у которых  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$ . Мысленно наложим треугольник  $ABC$  на треугольник  $A_1B_1C_1$  так, чтобы вершина  $C$  совместилась с вершиной  $C_1$ , а стороны  $BC$  и  $AC$  наложились на лучи  $B_1C_1$  и  $A_1C_1$  соответственно. Это можно сделать, т. к.  $\angle C = \angle C_1$ . Поскольку  $AC = A_1C_1$ , то сторона  $AC$  совместится со стороной  $A_1C_1$ , в частности, совместятся вершины  $A$  и  $A_1$ . Остается доказать, что вершины  $B$  и  $B_1$  также совместятся. Но так ли это? Допустим, что точка  $B$  совместилась не с точкой  $B_1$ , а с какой-то другой точкой  $B_2$  на луче  $C_1B_1$ . Тогда треугольник  $A_1B_1B_2$  – равнобедренный ( $A_1B_1 = A_1B_2$ ).

Поскольку углы при основании равнобедренного треугольника – острые, то смежные с ними углы – тупые. Поэтому либо угол  $B_1$  треугольника  $A_1B_1C_1$  тупой (если

<sup>1</sup> Нумерация признаков здесь и далее – условная.