

Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Н. МАКСИМЕНКО, А.Г. МЕГРАБОВ,
Л.В. ПАВШОК

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Часть 1

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2009

УДК 517(075.8)
М 171

Рецензенты:

доцент *Э.Б. Шварц*
канд. физ.-мат. наук, доцент *В.В. Хаблов*

Работа подготовлена на кафедре инженерной математики НГТУ
для студентов 1 курса технических специальностей
и всех форм обучения

Максименко В.Н.

М 171 Курс математического анализа : учеб. пособие / В.Н. Максименко, А.Г. Меграбов, Л.В. Павшок. – Ч. 1. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009. – 356 с.

ISBN 978-5-7782-1294-7

Учебник содержит следующие разделы математического анализа: элементы теории множеств, функции, пределы, непрерывность, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной, их геометрические и механические приложения. Объем и содержание тем в основном соответствует рабочим программам для студентов 1-го курса технических специальностей. Основная цель пособия – помочь студентам в осмыслении основных понятий и методов математического анализа и в грамотном их применении.

УДК 517(075.8)

ISBN 978-5-7782-1294-7

© Максименко В.Н., Меграбов А.Г.,
Павшок Л.В., 2009
© Новосибирский государственный
технический университет, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	4
Глава 1. Элементы теории множеств	11
§ 1.1. Логические знаки	11
§ 1.2. Основные определения. Операции над множествами	11
§ 1.3. Общее понятие отображения или функции. Отображение множеств. Эквивалентные множества	15
§ 1.4. Числовые множества	17
§ 1.5. Ограниченные множества. Верхние и нижние грани. Теорема о существовании точной грани	21
§ 1.6. Неравенство Коши	22
Глава 2. Предел числовой последовательности	25
§ 2.1. Определение окрестности точки, числовой последовательности и ее предела	25
2.1.1. Числовая последовательность	25
2.1.2. Предел числовой последовательности	27
2.1.3 Окрестность точки, геометрический смысл предела последовательности	28
§ 2.2. Теорема о единственности предела. Свойства пределов	29
2.2.1. Теорема о единственности предела	29
2.2.2. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности	30
2.2.3. Теоремы о предельном переходе в равенствах и неравенствах. Арифметические свойства пределов	33
2.2.4. Неопределенные выражения	36
§ 2.3. Монотонные последовательности. Существование предела. Число e	37
2.3.1. Монотонные последовательности	37
2.3.2. Теорема о пределе монотонной последовательности	38
2.3.3. Число e . Натуральные логарифмы	40
§ 2.4. Теорема Больцано – Вейерштрасса. Критерий Коши существования предела числовой последовательности (принцип сходимости)	41
2.4.1. Частичные последовательности и частичные пределы.	41
2.4.2. Фундаментальные последовательности и критерий Коши	42

Глава 3. Функции одной переменной	45
§ 3.1. Понятие числовой функции и способы ее задания.	
Явные и неявные функции	45
3.1.1. Понятие функции одной переменной (отображения)	45
3.1.2. Способы задания функции	46
3.1.3. Явные и неявные функции	48
§ 3.2. Свойства функций: монотонность, ограниченность, периодичность, четность и нечетность	49
3.2.1. Переменная и область ее изменения	49
3.2.2. Интервалы знакопостоянства и нули функции	49
3.2.3. Четность и нечетность функции	50
3.2.4. Периодичность функций	50
3.2.5. Монотонность функций	51
3.2.6. Ограниченные и неограниченные функции	52
§ 3.3. Сложная и обратная функции	53
3.3.1. Сложная функция	53
3.3.2. Обратная функция	54
§ 3.4. Функции, заданные в параметрическом виде.	
Полярные координаты	56
3.4.1. Параметрическое задание функции	56
3.4.2. Полярная система координат	58
§ 3.5. Обзор элементарных функций	61
3.5.1. Алгебраические функции	61
3.5.2. Основные элементарные функции и их графики	62
3.5.3. Элементарные функции	65
Глава 4. Предел функции. Непрерывные функции	68
§ 4.1. Предельная точка множества. Предел функции: определения Гейне и Коши	68
4.1.1. Предельная точка множества	68
4.1.2. Предел функции: определение Гейне и Коши	69
4.1.3. Конечные пределы функции при $x \rightarrow \infty$ и бесконечные	71
§ 4.2. Односторонние пределы	74
§ 4.3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции	76
§ 4.4. Основные теоремы о пределах функций	78
4.4.1. Общие свойства пределов функций	78
4.4.2. Арифметические свойства пределов функций. Предел сложной функции	79
§ 4.5. Первый и второй замечательные пределы	82
4.5.1. Первый замечательный предел	82
4.5.2. Второй замечательный предел	83
§ 4.6. Непрерывность функции в точке и на множестве	84

§ 4.7. Точки разрыва функции и их классификация	86
§ 4.8. Арифметические действия над непрерывными функциями. Непрерывность сложной и обратной функций	89
§ 4.9. Непрерывность основных элементарных функций	90
§ 4.10. Свойства функций, непрерывных на отрезке	92
§ 4.11. Символика « O » и « o ». Эквивалентные бесконечно малые	94
4.11.1. Основные определения	94
4.11.2. Основные теоремы об эквивалентных функциях	95
4.11.3. Основные эквивалентности.....	97
4.11.4. Предел показательно-степенной функции и неопределенности, возникающие при этом.....	99
Глава 5. Производная и дифференциал функции одной переменной.....	102
§ 5.1. Понятие производной. Односторонние производные. Математический и геометрический смысл производной....	102
5.1.1. Определение производной и односторонние производные	102
5.1.2. Механический смысл производной.....	104
5.1.3. Уравнения касательной и нормали к графику функции.....	105
§ 5.2. Дифференцируемость функции и дифференциал функции. Применение дифференциала к приближенным вычислениям	106
5.2.1. Дифференцируемость функции	106
5.2.2. Дифференциал функции	108
§ 5.3. Дифференцирование и дифференциал сложной функции. Инвариантность формы дифференциала.	109
5.3.1. Производная сложной функции.....	109
5.3.2. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы дифференциала	110
§ 5.4. Правила дифференцирования явно заданных функций	111
§ 5.5. Производные и дифференциалы основных элементарных функций.....	112
5.5.1. Логарифмическая функция	112
5.5.2. Степенная функция	113
5.5.3. Показательная функция	113
5.5.4. Тригонометрические функции.....	114
§ 5.6. Дифференцирование обратных функций и функций, заданных параметрически или неявно	115
5.6.1. Производная обратной функции. Дифференцирование обратных тригонометрических функций.....	115
5.6.2. Производные функций, заданных неявно.....	117

5.6.3. Дифференцирование функций, заданных параметрически	117
§ 5.7. Дифференцирование показательно-степенной функции и логарифмическое дифференцирование.....	118
§ 5.8. Производные и дифференциалы высших порядков	120
5.8.1. Повторное дифференцирование явно заданных функций.....	120
5.8.2. Производные высших порядков от функций, заданных неявно и параметрически	120
5.8.3. Дифференциалы высших порядков.....	122
§ 5.9. Теоремы Ферма, Ролля и теоремы о среднем значении (Лагранжа, Коши).....	123
5.9.1. Теорема Ферма	124
5.9.2. Теорема Ролля	124
5.9.3. Теорема Лагранжа. Формула конечных приращений ...	126
5.9.4. Теорема Коши.....	127
§ 5.10. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей.....	127
§ 5.11. Формула Тейлора	131
5.11.1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано	131
5.11.2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа	133
5.11.3. Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций	134
5.11.4. Некоторые применения формулы Тейлора	136
§ 5.12. Векторная функция скалярного аргумента и ее дифференцирование	138
5.12.1. Векторная функция скалярного аргумента и ее график	138
5.12.2. Предел и непрерывность вектор-функции.....	140
5.12.3. Производная вектор-функции, ее геометрический и механический смысл.....	143
5.12.4. Движение планет	147
§ 5.13. Уравнение касательной прямой к пространственной кривой. Уравнение нормальной плоскости	151
§ 5.14. Дифференциал дуги кривой	154
§ 5.15. Комплексная функция действительной переменной и ее производная.....	156
Глава 6. Приложения производной к исследованию функций.....	162
§ 6.1. Условия постоянства и монотонности (возрастания, убывания) функции.....	162
6.1.1. Условия постоянства функции	162

6.1.2. Условия монотонности функции.....	163
§ 6.2. Точки экстремума функции. Необходимое и достаточные условия существования локального экстремума функции.....	165
6.2.1. Локальные и абсолютные экстремумы функции	165
6.2.2. Необходимое условие существования локального экстремума функции.....	167
6.2.3. Достаточные условия существования локального экстремума	170
§ 6.3. Наибольшее и наименьшее значения функции.....	173
6.3.1. Отыскание абсолютных экстремумов.....	174
6.3.2. Достаточные условия существования абсолютного экстремума	174
§ 6.4. Выпуклость и вогнутость кривых (функций). Точки перегиба функции.....	177
6.4.1. Определения выпуклых и вогнутых кривых и точек перегиба.....	177
6.4.2. Достаточный признак вогнутости (выпуклости) графика функции.....	179
6.4.3. Достаточные условия существования точек перегиба ..	181
§ 6.5. Асимптоты графика функции	184
§ 6.6. Общая схема исследования функции и построение ее графика	186
§ 6.7. Приближенное решение уравнений $f(x) = 0$	189
6.7.1. Формулировка задачи	189
6.7.2. Отделение действительных корней.....	190
6.7.3. Уточнение корня. Постановка задачи	192
6.7.4. Дихотомия, или метод половинного деления.....	192
6.7.5. Метод простых итераций	194
6.7.6. Метод касательных (метод Ньютона), или метод линеаризации	194
6.7.7. Метод пропорциональных частей, или метод хорд.....	196
6.7.8. Метод секущих – хорд.....	198
§ 6.8. Интерполирование функций	199
6.8.1. Задача интерполирования.....	199
6.8.2. Интерполяционная формула Лагранжа.....	200
6.8.3. Оценка погрешности интерполяционной формулы Лагранжа	203
§ 6.9. Кривизна кривой и ее вычисление	204
6.9.1. Определение кривизны кривой.....	204
6.9.2. Общая формула кривизны кривой.....	205
6.9.3. Формула кривизны плоской кривой, заданной параметрически	208

6.9.4. Формула кривизны плоской кривой в декартовых координатах	209
§ 6.10. Круг, радиус и центр кривизны. Эволюта и эвольвента ...	211
6.10.1. Круг, радиус и центр кривизны	211
6.10.2. Эволюта и эвольвента	213
Глава 7. Неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования	219
§ 7.1. Первообразная функции. Неопределенный интеграл.....	219
§ 7.2. Основные свойства неопределенного интеграла	223
§ 7.3. Основные правила интегрирования и таблица основных неопределенных интегралов. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции.....	226
§ 7.4. Непосредственное интегрирование. Интегрирование с помощью замены переменной (метод подстановки) и подведения под знак дифференциала	231
7.4.1. Непосредственное интегрирование	231
7.4.2. Интегрирование с помощью подстановки (замены переменной)	232
7.4.3. Метод подведения под знак дифференциала	233
§ 7.5. Метод интегрирования по частям.....	235
§ 7.6. Рациональные дроби. Разложение рациональной дроби на простейшие дроби	238
7.6.1. Рациональные дроби	238
7.6.2. Простейшие дроби	239
7.6.3. Разложение рациональной дроби на простейшие дроби.....	240
7.6.4. Метод неопределенных коэффициентов.....	242
7.6.5. Метод частных значений.....	243
§ 7.7. Интегрирование простейших рациональных дробей	244
§ 7.8. Интегрирование произвольных рациональных дробей.....	247
§ 7.9. Интегрирование некоторых выражений, содержащих радикалы	248
7.9.1. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \dots\right) dx$	249
7.9.2. Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2}, \dots\right) dx$	250
7.9.3. Интегрирование биномиальных дифференциалов	251
§ 7.10. Интегрирование выражений вида $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$	253

7.10.1. Интегралы вида $I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$	253
7.10.2. Интегралы вида $I_2 = \int \frac{(Ax + B)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$	254
7.10.3. Интегралы вида $I_3 = \int \frac{dx}{(Ax + B)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$	255
7.10.4. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$	255
§ 7.11. Интегрирование тригонометрических выражений	259
7.11.1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$	260
7.11.2. Другие методы	261
7.11.3. Частные подстановки для вычисления $\int R(\sin x, \cos x)dx$	261
7.11.4. Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$ $(m, n \in \mathbb{Z}, m \geq 0, n \geq 0)$	263
7.11.5. Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^n x dx, \int \operatorname{ctg}^m x dx$ ($n \in \mathbb{N}, n > 1$)	263
7.11.6. Интегралы вида $\int \sin mx \cos nxdx, \int \cos mx \cos nxdx,$ $\int \sin mx \sin nxdx$ ($m, n \in \mathbb{R}$)	264
Глава 8. Определенный интеграл	267
§ 8.1. Интегральная сумма и определенный интеграл	268
§ 8.2. Условия интегрируемости функций	269
8.2.1. Необходимое условие интегрируемости функции	270
8.2.2. Достаточные условия интегрируемости функции	271
§ 8.3. Геометрический и физический смысл определенного интеграла	271
8.3.1. Геометрический смысл определенного интеграла	271
8.3.2. Физический смысл определенного интеграла	272
§ 8.4. Свойства определенного интеграла	273
8.4.1. Свойства определенного интеграла, выражаемые равенствами	273
8.4.2. Свойства определенного интеграла, выражаемые неравенствами	276
§ 8.5. Определенный интеграл с переменным верхним пределом	280
§ 8.6. Формула Ньютона–Лейбница	283
§ 8.7. Основные методы вычисления определенного интеграла	284

8.7.1. Вычисление простейших интегралов с помощью формулы Ньютона–Лейбница.....	284
8.7.2. Замена переменной (подстановка) в определенном интеграле.....	285
8.7.3. Интегрирование по частям в определенном интеграле.....	286
§ 8.8. Несобственные интегралы первого рода (с бесконечными пределами)	287
8.8.1. Понятие несобственных интегралов	287
8.8.2. Формула Ньютона–Лейбница для несобственных интегралов первого рода	290
8.8.3. Признаки сходимости несобственных интегралов первого рода (для неотрицательных функций)	290
8.8.4. Сходимость в общем случае (для функции $f(x)$, которая может менять знак на промежутке $[a, \infty)$)	292
§ 8.9. Несобственные интегралы второго рода (от неограниченных функций).....	294
8.9.1. Определение несобственного интеграла второго рода	294
8.9.2. Формула Ньютона–Лейбница для несобственных интегралов второго рода.....	296
8.9.3. Признаки сходимости несобственных интегралов второго рода.....	296
§ 8.10. Приближенное вычисление определенных интегралов	297
8.10.1. Постановка задачи.....	297
8.10.2. Метод средних прямоугольников.....	298
8.10.3. Метод трапеций.....	299
8.10.4. Метод параболических трапеций (метод Симпсона) ..	300
Глава 9. Геометрические и механические приложения определенного интеграла.....	304
§ 9.1. Площадь плоской фигуры в прямоугольных и полярных координатах	304
9.1.1. Вычисление площади плоской фигуры в прямоугольных координатах.....	304
9.1.2. Вычисление площади плоской фигуры в полярных координатах	308
§ 9.2. Вычисление длины дуги кривой.....	310
9.2.1. Длина дуги плоской кривой в прямоугольной системе координат.....	310
9.2.2. Длина дуги плоской кривой, заданной параметрически	313
9.2.3. Длина дуги пространственной кривой.....	314
9.2.4. Длина дуги кривой в полярной системе координат.....	314

9.2.5. Дифференциал длины дуги	315
§ 9.3. Вычисление объемов тел.....	316
9.3.1. Вычисление объемов тел по известным поперечным сечениям.....	316
9.3.2. Вычисление объема тела вращения.....	318
§ 9.4. Вычисление площади поверхности вращения	322
§ 9.5. Статические моменты, моменты инерции и координаты центра масс	325
9.5.1. Определения	325
9.5.2. Вычисление статических моментов, моментов инерции и координат центра масс плоской линии	326
9.5.3. Вычисление статических моментов, моментов инерции и координат центра масс плоской фигуры.....	330
§ 9.6. Путь, пройденный точкой	333
§ 9.7. Вычисление работы переменной силы	334
§ 9.8. Кинетическая энергия тела.....	336
§ 9.9. Вычисление силы давления жидкости.....	337
§ 9.10. Движение ракеты (тела с переменной массой)	340
9.10.1. Уравнение И.В. Мещерского	340
9.10.2. Задача о расходе топлива при движении ракеты	341
9.10.3. Обратные задачи механики тел переменной массы.....	342
Библиографический список.....	345