ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

Физико-математические науки

Математика

Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Крицына Н.А., *кандидат технических наук, доцент*
Кулябичев Ю.П., *доктор технических наук, профессор*
Козин Р.Г., *кандидат технических наук, доцент*
(Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»)

ОРГАНИЗАЦИЯ ПОЛНОГО ПЕРЕБОРА АРГУМЕНТОВ ПРИ НАХОЖДЕНИИ ГЛОБАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА КРИТЕРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ

Предложен алгоритм организации процесса полного перебора при решении задач условной оптимизации.

Ключевые слова: *условная оптимизация, полный перебор.*

THE ORGANIZATION OF PROCESS OF FULL SEARCH ARGUMEN AT THE FINDING OF THE GLOBAL EXTREMUM CRETE-RIJA OPTIMIZATION

The algorithm of the organization of process of full search is offered for decision tasks of conditional optimization.

Keywords: *the conditional optimization, full search.*

Стремление к оптимизации различных аспектов производственной деятельности является естественным и закономерным процессом современной жизни. При этом критерии качества оптимизации, как правило, оказываются неявно выраженными и многоэкстремальными функциями многих переменных – аргументов оптимизации. Наличие ограничений, накладываемых на аргументы оптимизации, еще больше усложняют процесс оптимизации.

В общем виде задача условной оптимизации многомерного критерия выглядит следующим образом:

– найти экстремум критерия $J(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \psi(x_1, x_2, \cdots, x_m)$

при ограничениях $f_j(x_1, x_2, \cdots, x_m) \geq (\leq)\ 0, \ \ j = \overline{1, n}$.

Причем, как уже отмечалось, и критерий, и функции ограничений часто носят неявный характер относительно аргументов оптимизации $x_1, x_2, \cdots, x_m$.

В такой ситуации наиболее надежным способом определения глобального экстремума критерия является полный перебор допустимых значений аргументов.

Как правило, алгоритмы организации процесса полного перебора в задачах условной оптимизации являются достаточно трудоемкими и используют сложную систему логических предикатов.

Однако в том случае, если накладываемые на аргументы оптимизации $x_1, x_2, \cdots, x_m$ ограничения имеют простой вид, типа: $x_i^{\min} \le x_i \le x_i^{\max}$, $i = \overline{1, m}.$, то целесообразно использовать процедуру полного перебора, основанную на формировании некоторого числа в произвольной системе счисления [1] без использования сложных логических построений.

Представим интервал определения аргумента x_i, в виде:

$$x_i^{\max} - x_i^{\min} = \sum_{k=0}^{p_i} \Delta x_{ik}, \ \Delta x_{i0} = 0, \quad i = \overline{1, m.}, \tag{1}$$

где $\Delta x_{ik}, k = \overline{0, p_i}$ – заданные кванты дискретизации аргумента x_i, p_i – целое положительное число интервалов разбиения области допустимых значений i-того аргумента.

Таким образом, значение аргумента x_i, с точностью до ошибок дискретизации, можно представить в виде:

$$x_i \cong x_i^{\min} + \sum_{k=0}^{a_i} \Delta x_{ik}, \ i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

причем, верхние параметры суммирования a_i являются не только целыми неотрицательными числами но и удовлетворяют условию:

$$0 \le a_i \le p_i, \ i = \overline{1, m}.$$

Учитывая вышеизложенное, критерий оптимизации будет многомерной функцией параметров a_i :

$$J(a_1, a_2, \cdots, a_m) = \varphi(a_1, a_2, \cdots, a_m), \tag{3}$$

при условии, что a_i – целые неотрицательные числа, удовлетворяющие неравенствам:

$$0 \le a_i \le p_i, \ i = \overline{1, m}. \tag{4}$$

Таким образом, принимая во внимание условия, накладываемые на параметы a_i, $i = \overline{1, m}$, их, можно трактовать как коэффициенты разложения целого неотрицательного числа B в числовой ряд по m разрядам с переменным основанием разрядов $p_i + 1$, $i = \overline{1, m}$.

Итак, сформируем систему счисления, имеющую m разрядов, причем основания разрядов $p_i + 1$, $i = \overline{1, m}$, превышает на единицу число отрезков дискретизации интервала определения i-того аргумента (1).

Представим целое положительное число B в виде разложения в числовой ряд по m разрядам в системе счисления с переменным основанием каждого разряда [3]:

$$B = a_m \prod_{i=1}^{m-1} (p_i + 1) + a_{m-1} \prod_{i=1}^{m-2} (p_i + 1) + \cdots + a_3 (p_2 + 1)(p_1 + 1) + a_2 (p_1 + 1) + a_1, \tag{5}$$

где коэффициенты разложения $a_m, a_{m-1}, \cdots, a_3, a_2, a_1$ - целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию:

$$0 \le a_i \le p_i, \ i = \overline{1, m}. \tag{6}$$

Как видим, условия (5) и (6) полностью совпадают.

Очевидно, максимальное число $B^{\max}$, которое может быть получено с помощью такого представления будет:

$$B^{\max} = p_m \prod_{i=1}^{m-1} (p_i + 1) + p_{m-1} \prod_{i=1}^{m-2} (p_i + 1) + \cdots + p_3 (p_2 + 1)(p_1 + 1) + p_2 (p_1 + 1) + (p_1). \tag{7}$$

Именно такое количество расчетов необходимо произвести для выявления экстремума критерия (3) при использовании метода полного перебора.

Решим обратную задачу, а именно:

– найдем целочисленные неотрицательные коэффициенты $0 \le a_i \le (p_i)$; $i = \overline{1,m}$, соответствующие любому неотрицательному целому числу B, удовлетворяющему условию $0 \le B \le B^{\max}$.

Прежде всего, определим значение коэффициента старшего разряда m, как целую часть деления числа B на произведение оснований предыдущих разрядов:

$$a_m = \left[\frac{B}{\prod_{i=1}^{m-1} (p_i + 1)} \right]. \tag{8}$$

Для определения коэффициента следующего разряда a_{m-1} выделим остаток от предыдущего деления, присвоим B:

$$B = B - a_m \prod_{i=1}^{m-1} (p_i + 1). \tag{9}$$

Разделим на произведение оснований оставшихся разрядов, полученный остаток от деления, и выделим целую часть:

$$a_{m-1} = \left[\frac{B}{\prod_{i=1}^{m-2} (p_i + 1)} \right]. \tag{10}$$

Повторяя процедуры (9), (10) получим рекуррентную последовательность нахождения коэффициентов:

$$B = B - a_j \prod_{i=1}^{j-1} (p_i + 1) \tag{11}$$

$$a_{j-1} = \left[\frac{B}{\prod_{i=1}^{j-2} (p_i + 1)} \right]. \tag{12}$$

Действия (11), (12) повторяются для всех индексов j, удовлетворяющих условию: $m \ge j \ge 3$. Коэффициент младшего разряда находится по формуле:

$$a_1 = B - a_2 (p_1 + 1). \tag{13}$$

Таким образом, решение задачи (3) при ограничениях (4) методом полного перебора сводится к последовательному перебору целых чисел от 0 до $B^{\max}$; расчету коэффициентов a_j $(j = \overline{1,m})$, соответствующих текущему значению B, по формулам (8), (9), (10), (11), (12), (13); расчету критерия (3) и проверке полученного значения на экстремальность.

Ниже приведен порядок расчетов в соответствии с предложенной методикой решения задачи (3) при ограничениях (4):

1. Задание начальных данных и организация предварительных расчетов

1.1. Исходные данные:

$x_i^{\min}, x_i^{\max}$, $i = \overline{1,m}$. – максимальное и минимальное значения области определения i-того аргумента;

$\Delta x_{ik}, k = \overline{1, p_i}, i = \overline{1,m}$ - кванты дискретизации аргумента x_i, p_i – целое положительное число интервалов разбиения области допустимых значений i-того аргумента.