

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Журнал публикует оригинальные статьи и заказные обзоры по механике жидкости, газа, плазмы, динамике многофазных сред, физике и механике взрывных процессов, электрическому разряду, ударным волнам, состоянию и движению вещества при сверхвысоких параметрах, теплофизике, механике деформируемого твердого тела, композитным материалам, методам диагностики газодинамических физико-химических процессов.

Журнал реферируется и аннотируется в следующих изданиях: РЖ Механика; РЖ Физика; European Mathematical Society; Mathematical Reviews; Solid State Abstracts Journal; Applied Mechanics Reviews; Chemical Abstracts; Current Contents/Engineering, Computing, and Technology; SciSearch; Research Alert.

Журнал переводится на английский язык и издается в США издательством Kluwer Academic/Plenum Publishers под названием Journal of Applied Mechanics and Technical Physics

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Б. А. Луговцов
Зам. гл. редактора Э. П. Кругляков
Отв. секретарь Г. А. Швецов

Члены редколлегии

Б. Д. Аннин	В. М. Ковеня	В. Е. Панин	А. К. Ребров
В. Д. Бондарь	А. А. Маслов	В. В. Пененко	Е. И. Роменский
В. К. Кедринский	В. Е. Накоряков	А. Г. Пономаренко	В. М. Фомин
С. П. Киселев	Р. И. Нигматулин	В. В. Пухначев	

Учредители
журнала

Сибирское отделение РАН
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева
Институт теоретической и прикладной механики СО РАН

УДК 525.61+532.5

СОЛНЕЧНЫЕ И ЛУННЫЕ ПРИЛИВЫ В МАГМЕ

Б. В. Войцеховский, Р. М. Гарипов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Планета рассматривается как состоящая из идеальной и несжимаемой жидкости, находящейся под действием собственной гравитации и притяжения небесных тел. Неоднородность, а также наличие твердого ядра моделируются точечной массой, сосредоточенной в центре однородной планеты. Получена формула, выражающая массу ядра через коэффициент сплющивания планеты и угловую скорость ее вращения вокруг своей оси. Определяется высота приливов под действием Солнца и спутников. Применительно к Земле численные значения имеют тот же порядок, что и высота приливных волн в океане. Принятое исходное предположение справедливо, если энергия упругой деформации под действием приливных сил намного меньше кинетической энергии приливного относительного движения масс планеты. Показано, что это характерно для планет-гигантов и в меньшей степени для Земли. Применяются точные решения Дирихле, Римана и Овсянникова, используется матричное исчисление.

В работе используются следующие масштабы: за единицу длины, плотности и ускорения приняты соответственно средний радиус r_0 , средняя плотность ρ_0 и ускорение свободного падения на поверхности планеты $(4\pi/3)\gamma\rho_0 r_0$, где γ — гравитационная постоянная. Отсюда получаются единицы времени и скорости $T = \sqrt{3/(4\pi\gamma\rho_0)}$ и r_0/T (для Земли 805 с и 7,93 км/с). В этих единицах гравитационная постоянная равна $3/(4\pi)$, а масса планеты — $4\pi/3$. Поэтому единицей массы будет $r_0^3\rho_0$, единицей давления — $\rho_0 r_0^2 T^{-2}$. Далее употребляются безразмерные переменные, т. е. отношения размерных переменных к их единицам измерений. Для них сохраняются те же обозначения.

1. Собственная гравитация планеты. Предположим сначала, что планета однородная. Тогда ее плотность равна 1. Будем считать, что планета имеет форму эллипсоида с центром в начале системы координат:

$$f(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x} \cdot A \mathbf{x} - 1 \leq 0,$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор точки пространства; A — симметричная положительно-определенная матрица. Пусть оси координат совпадают с осями эллипсоида. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} a_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & a_3^{-2} \end{pmatrix},$$

где a_1, a_2, a_3 — полуоси эллипсоида. Так как средний радиус эллипсоида $\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} = 1$, то и $\det A = 1$. В частности, когда эллипсоид является шаром, матрица A равна единичной матрице I .

Потенциал собственного гравитационного поля планеты обозначим через $h_0(\mathbf{x})$. В точке \mathbf{x} на единицу массы действует сила гравитации $\nabla h_0(\mathbf{x})$ (∇ — градиент). Следует отметить, что внутри эллипсоида собственный гравитационный потенциал является полиномом от x_1, x_2 и x_3 , который в данной специально ориентированной системе координат имеет вид

$$h_0(\mathbf{x}) = -(1/2)(d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + d_3 x_3^2 - d_0) \quad \text{при} \quad f(\mathbf{x}) \leq 0, \quad (1)$$

где

$$d_0 = \frac{3}{2} \int_0^\infty \Delta ds; \quad \Delta = \left(\prod_{i=1}^3 (1 + sa_i^{-2}) \right)^{-1/2}; \quad d_i = \frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{\Delta}{a_i^2 + s} ds \quad (i = 1, 2, 3)$$

(см. [1, 2]). Вне эллипсоида потенциал $h_0(\mathbf{x})$ не выражается через элементарные функции. Матрица

$$D_0 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

является функцией матрицы A . Легко найти след этой матрицы — сумму диагональных элементов $\text{sp } D_0(A) = 3$ (берется интеграл от $-3d\Delta/ds$). Эту функцию вычислим приближенно в случае, когда эллипсоид близок к шару, т. е. $A \simeq I$:

$$D_0(A) = I + (3/5)(A - I) - (3/70) \text{sp}(A - I)^2 I - (6/35)(A - I)^2 + O((A - I)^3).$$

Матричная функция $D_0(A)$ не зависит от выбора системы координат, а так как последняя формула инвариантна, она верна и для недиагональных матриц A и D_0 , если $\det A = 1$. Здесь члены второго порядка малости вычислены для того, чтобы убедиться, что ими можно пренебречь. Для решения поставленной задачи достаточно линейного приближения

$$D_0(A) = (2/5)I + (3/5)A + O((A - I)^2). \quad (2)$$

В этом приближении $\det A \simeq 1 + \text{sp}(A - I)$, откуда в силу условия $\det A = 1$ следует, что $\text{sp } A \simeq 3$.

Пусть теперь планета имеет твердое ядро, в котором сосредоточена доля ее массы, равная α . Тогда гравитационный потенциал планеты равен сумме потенциалов ядра, которое приближенно можно считать точечной массой $(4\pi/3)\alpha$, расположенной в центре, и однородного жидкого эллипсоида плотности $1 - \alpha$:

$$h_0(\mathbf{x}) = \alpha|\mathbf{x}|^{-1} - (1/2)(1 - \alpha)(\mathbf{x} \cdot D_0\mathbf{x} - d_0),$$

где $|\mathbf{x}| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2}$ — длина вектора \mathbf{x} . При выводе последней формулы использована формула (1). Гравитационный потенциал точечного ядра уже не является полиномом от координат \mathbf{x} внутри эллипсоида. Однако с принятой точностью его можно заменить полиномом в окрестности поверхности эллипсоида. Действительно, как следует из уравнения поверхности $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot (A - I)\mathbf{x} + |\mathbf{x}|^2 - 1 = 0$, на ней $|\mathbf{x}| = 1 + O(A - I)$. Поэтому с точностью до слагаемых второго порядка малости $|\mathbf{x}|^{-1} = (1 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 1)^{-1/2} \simeq 3/2 - (1/2)\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ при $f(\mathbf{x}) = 0$.

Итак, с точностью $O((A - I)^2)$, учитывая формулу (2), имеем

$$h_0(\mathbf{x}) \simeq -(1/2)\mathbf{x} \cdot D\mathbf{x} \quad (|\mathbf{x}| \simeq 1), \quad (3)$$

где опущены не зависящие от \mathbf{x} слагаемые, так как существен только градиент от h_0 , а $D \simeq (1/5)(2 + 3\alpha)I + (3/5)(1 - \alpha)A$ ($\text{sp } A \simeq 3$).

2. Внешняя гравитация. Начало системы координат $\mathbf{x} = 0$ поместим в центр планеты, так что Солнце и спутники планеты как бы вращаются вокруг нее по заданным траекториям в силу законов Кеплера. Это означает, что мы находимся в системе мира Птолемея с единственным отличием, что наша система координат не вращается, поэтому звезды будут казаться неподвижными. На планете действуют силы гравитации от небесных тел с потенциалом $h(\mathbf{x}, t)$, явно зависящим от времени t . Так как радиус планеты