

УДК 517.9
ББК 22.161
К30

Авторы:

*И.В. Асташова, С.С. Ежак, Е.С. Карулина,
В.А. Никишкин, М.Ю. Тельнова, А.В. Филиновский*

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений МГУ имени М.В. Ломоносова *А.А. Коньков*
доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций и функционального анализа МГУ имени М.В. Ломоносова *А.А. Шкаликов*

Научные редакторы - составители:

доктор физико-математических наук, профессор *И.В. Асташова*
кандидат физико-математических наук, доцент *В.А. Никишкин*
доктор физико-математических наук, профессор *А.В. Филиновский*

Ответственный редактор серии

ректор Московского государственного университета экономики, статистики и информатики (МЭСИ), доктор экономических наук, профессор *Н.В. Тихомирова*

Главный редактор издательства *Н.Д. Эриашвили,*

кандидат юридических наук, доктор экономических наук, профессор,
лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники

К30 **Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа:** науч. издание / [И.В. Асташова и др.]; под ред. И.В. Асташовой. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. — 647 с.

ISBN 978-5-238-02368-7

Агентство СІР РГБ

Книга объединяет круг вопросов, связанных с исследованием качественных свойств решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, краевых задач для уравнений в частных производных и связанных с ними спектральных задач.

Содержатся подробные доказательства результатов, полученных авторами как классическими, так и оригинальными методами исследования.

Результаты могут быть полезны как студентам и аспирантам, начинающим знакомство с качественной теорией дифференциальных уравнений и краевых задач, так и специалистам по дифференциальным уравнениям и функциональному анализу.

ББК 22.161

ISBN 978-5-238-02368-7

© ИЗДАТЕЛЬСТВО ЮНИТИ-ДАНА, 2012

Принадлежит исключительное право на использование и распространение издания (ФЗ № 94-ФЗ от 21 июля 2005 г.).

© Оформление «ЮНИТИ-ДАНА», 2012

Оглавление

Введение	13
Сведения об авторах	19
I. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (Асташова И.В.)	22
Введение	25
1. Равномерные оценки положительных решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений	35
1.1. Оценки решений уравнений с квазипроизводной	35
1.2. Представление линейного дифференциального оператора в виде оператора квазипроизводной	48
1.3. Оценки решений квазилинейного уравнения с младшими производными	57
2. Равномерные оценки решений квазилинейных дифференциальных неравенств	61
2.1. Оценки решений неравенства с квазипроизводной	61
2.2. Оценки решений квазилинейных неравенств с младшими производными	64
3. Критерий колеблемости всех решений квазилинейных дифференциальных уравнений	67
4. Асимптотическая эквивалентность нелинейных дифференциальных уравнений	84

4.1.	Существование асимптотически полиномиальных решений у квазилинейных дифференциальных уравнений	84
4.2.	Асимптотическая эквивалентность нелинейных дифференциальных уравнений с правой частью	92
5.	Асимптотическое поведение знакопостоянных решений нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка	97
5.1.	Существование при $n \geq 2$ решений, имеющих вертикальную асимптоту со степенной асимптотикой	97
5.2.	Кнезеровские решения при $n \geq 2$	110
5.3.	Решения с вертикальной асимптотой при $n = 3$ и $n = 4$	116
5.4.	Кнезеровские решения при $n = 3$ и $n = 4$	124
5.5.	Поведение знакопостоянных решений при убывании аргумента	134
6.	Знакопеременные решения	136
6.1.	Существование колеблющихся решений для любого $n > 2$	136
6.2.	Асимптотическое поведение знакопеременных решений уравнений 3-го порядка при возрастании аргумента	137
6.3.	Асимптотическое поведение знакопеременных решений уравнения 3-го порядка при убывании аргумента	155
6.4.	Асимптотическое поведение знакопеременных решений уравнений 4-го порядка при $yy^{IV} \geq 0$	158
6.5.	Асимптотическое поведение решений уравнений 4-го порядка при $yy^{IV} \leq 0$	168
7.	Классификация решений уравнений третьего и четвертого порядков	186
7.1.	Классификация решений уравнений третьего и четвертого порядков в случае регулярной нелинейности	186

7.2. Существование решения с заданной областью определения уравнения третьего порядка	192
7.3. Случай сингулярной нелинейности	201
8. Задача Н.А.Изобова о кнезеровских решениях сингулярного нелинейного дифференциального уравнения второго и третьего порядков	205
8.1. Постановка задачи	205
8.2. Ответ к задаче Н. А. Изобова при $n = 3$	206
8.3. Доказательство основных результатов	207
План доказательства	207
Основная часть доказательства	209
9. Равномерные оценки решений нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка	215
10. Асимптотическое поведение решений квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка	229
11. Асимптотическое поведение решений одномерного уравнения Шредингера	259
11.1. Фазовое пространство	259
11.2. Динамическая система на фазовом пространстве для постоянной $p(x)$	261
11.3. Случай $u_0 = \pm i$. Замкнутые траектории	262
11.4. Случай комплексных p_0	263
11.5. Случай непостоянной $p(x)$	268
11.6. Оценки	270
Список литературы	273
II. Стабилизация и спектр в задачах распространения волн (Филиновский А.В.)	289
Введение	291
1. Задача Коши	292
1.1. Одномерное волновое уравнение. Плоские волны	292
1.2. Многомерное волновое уравнение. Сферические средние	294
1.3. Двумерное волновое уравнение. Диффузия волн	297

2. Смешанная задача и спектральные разложения	299
2.1. Смешанная задача и энергетическое тождество	299
2.2. Обобщенное решение из энергетического класса	300
2.3. Оценка сверху весовой энергии	301
2.4. Оценка снизу весовой энергии	306
3. Спектр оператора Лапласа и поведение локальной энергии	308
3.1. Спектральное представление обобщенного решения	308
3.2. Почти-периодичность решений в ограниченной области	318
3.3. Поведение локальной энергии при наличии точечного спектра	319
3.4. Непрерывность спектра и убывание средних локальной энергии	321
3.5. Абсолютная непрерывность спектра и убывание локальной энергии	327
3.6. Непрерывность спектра полигармонического оператора	331
4. Стационарная задача с комплексным параметром	343
4.1. Уравнение Гельмгольца в верхней полуплоскости. Теорема Пэли-Винера	343
4.2. Свойства решений уравнения Гельмгольца верхней полуплоскости	345
4.3. Интегральное соотношение	347
4.4. Области со звездными границами	351
4.5. Регулярно расширяющиеся области	353
4.6. Поведение решений в окрестности нуля	362
4.7. Уравнение Пуассона в весовых пространствах	370
4.8. Асимптотические разложения	383
5. Стабилизация решений нестационарных задач	389
5.1. Рассеяние энергии в областях со звездными границами	389

5.2. Скорость убывания локальной энергии в областях со звездными границами	391
5.3. Рассеяние энергии в регулярно расширяющихся областях	406
5.4. Скорость убывания локальной энергии в регулярно расширяющихся областях	415
Список литературы	450
III. Асимптотика решений эллиптических краевых задач (Никишкин В.А.)	464
Введение	465
1. Решение задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в области типа многогранника	467
2. Оценки решений эллиптических краевых задач в слое	477
2.1. Постановка задачи и основные обозначения	477
2.2. Формулировка основных результатов	477
2.3. Эллиптические задачи в слое	480
2.4. Переменные коэффициенты	483
2.5. Оценки модуля решения	484
3. Асимптотика решений краевых задач для уравнения Пуассона в слое	486
4. Положительные решения сингулярных краевых задач для уравнения $\Delta u = u^k$	491
4.1. Положительные решения обыкновенного дифференциального уравнения типа Эмдена — Фаулера второго порядка	491
4.2. Многомерный случай	499
Список литературы	502
IV. Оценки первого собственного значения некоторых задач Штурма — Лиувилля с интегральным условием на потенциал	506
Введение	507
1. Оценки первого собственного значения задачи Штурма — Лиувилля с условиями Дирихле (Ежак С.С.)	517

1.1.	Постановка задачи и основные обозначения	517
1.2.	Формулировка основных результатов	518
1.3.	Оценки для задачи с положительным потенциалом	519
1.4.	Оценки для задачи с отрицательным потенциалом	534
2.	Оценки первого собственного значения задачи Штурма — Лиувилля с краевыми условиями третьего типа (<i>Карулина Е.С.</i>)	560
2.1.	Оценки сверху минимального собственного значения	560
2.2.	Оценки снизу минимального собственного значения	580
2.3.	Графическая интерпретация полученных результатов для симметричных краевых условий	594
3.	Оценки первого собственного значения задачи Штурма—Лиувилля с условиями Дирихле и весовым интегральным условием (<i>Тельнова М.Ю.</i>)	608
3.1.	Постановка задачи и основные обозначения	608
3.2.	Оценки первого собственного значения снизу	613
3.3.	Оценки первого собственного значения сверху	620
3.4.	Достижимость $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ при $\gamma > 1$, $0 \leq \alpha < 2\gamma - 1$, $0 \leq \beta < 2\gamma - 1$	635