МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

Учебное пособие для вузов

Составители:
Л.Ю. Кабанцова,
Т.К. Кацаран

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2014

В математике можно выделить два направления: одно изучает непрерывные объекты, другое – дискретные. Часто к изучению одного и того же явления можно подойти с разных точек зрения. Производящие функции, изучению которых посвящено данное учебное пособие, являются примером плодотворной связи между дискретными и непрерывными объектами. Метод производящих функций особенно продуктивен при решении рекуррентных соотношений и комбинаторных задач.

§ 1. Определение и примеры производящих функций

Идея производящих функций достаточно проста. Числовой последовательности $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ (дискретному объекту) поставим в соответствие степенной ряд (непрерывный объект)

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots, \quad x \in R, \tag{1}$$

для исследования которого можно применить мощный аппарат математического анализа, в частности, ряды Маклорена, см. [1]. Степенные ряды вида (1) можно складывать, вычитать, умножать, дифференцировать.

Определение. Функция $G(x)$ называется *производящей функцией* последовательности $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, если для всех x из некоторого открытого множества выполняется равенство

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots. \tag{2}$$

Говорят, что функция $G(x)$ "производит" или "генерирует" последовательность $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$, поскольку в разложении функции $G(x)$ в ряд по степеням x, коэффициенты при x^n равны a_n. Обозначается этот факт с помощью записи

$$[x^n]G(x) = a_n. \tag{3}$$

Приведем несколько примеров хорошо известных производящих функций.

1. Самым известным примером производящей функции является *бином Ньютона*

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n x^n, \tag{4}$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальные коэффициенты (число сочетаний без повторений из n элементов по k, т.е. число подмножеств мощности k множества мощности n, $n \geq k$).

интегралом $G(x)$ – функция

$$\int G(x)dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots.$$

Операция дифференцирования обратна операции интегрирования:

$$\left(\int G(x)dx \right)' = G(x).$$

Операция же интегрирования производной приводит к функции с нулевым свободным членом, и поэтому результат, вообще говоря, отличается от исходной функции.

Замечание. Нетрудно видеть, что для функций, представимых степенными рядами, формула для производной соответствует обычной. Формула для интеграла соответствует значению интеграла с переменным верхним пределом

$$\int G(x)dx = \int\limits_0^x G(s)ds.$$

4) Сдвиг.

Умножим левую и правую части равенства (7) на x^m:

$$x^m G(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + a_2 x^{m+2} + \ldots.$$

Полученная функция генерирует новую последовательность

$$(0, \ldots, 0, a_0, a_1, \ldots),$$

которая является сдвигом исходной последовательности на m элементов вправо, то есть

$$[x^n](x^m G(x)) = \begin{cases} 0, & n < m, \\ a_{n-m}, & n \geq m. \end{cases} \tag{9}$$

5) Полиномиальный множитель и делитель.

Полиномиальный множитель "n"возникает при умножении производной производящей функции на x. Появление делителя в генерируемой производящей функцией последовательности возникает в результате интегрирования. Проведем преобразования:

$$xG'(x) = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n.$$

ŋqdqɐeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqdqɏqɐè

Таким образом,

$$[x^n](xG'(x)) = na_n. \tag{10}$$

Аналогично,

$$\int\limits_0^x \frac{G(t)-a_0}{t}\,dt = \int\limits_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{n-1}\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} x^n.$$

$$[x^n]\left(\int\limits_0^x \frac{G(t)-a_0}{t}\,dt\right) = \frac{a_n}{n}, \quad n \ge 1. \tag{11}$$

$$[x^n]\left(\int\limits_0^x G(t)\,dt\right) = \frac{a_{n-1}}{n}, \quad n \ge 1. \tag{12}$$

6) Произведение производящих функций.

Перемножим производящие функции $G(x)$ и $H(x)$ (см. (7)):

$$F(x) = G(x)\cdot H(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n. \tag{13}$$

Сумму, взятую в скобки, принято называть *сверткой* производящих функций $G(x)$ и $H(x)$ (обозначим ее через c_n):

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Рассмотрим частный случай. Пусть $b_n = 1$, тогда (так как $\dfrac{1}{1-x}$ – производящая функция последовательности $(1, 1, \ldots)$)

$$F(x) = G(x)\frac{1}{1-x} = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) x^n. \tag{14}$$

Мы получаем, что функция $G(x)/(1-x)$ генерирует последовательность частичных сумм исходной последовательности a_n.

Теперь мы можем получить разложение в ряд дробей вида $1/(1-x)^m, m = 1, 2, 3, \ldots$. Полагая в левой части равенства (14)

ŋqdqȺeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔȺ ɈqddɏqȺè

$G(x) = 1$, а в правой части соответствующую этой функции генерирующую последовательность $(1, 0, 0, \ldots)$, получим:

$$F_1(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \Leftrightarrow \qquad (1, 1, 1, \ldots) = (1)_{n \geq 0}. \tag{15}$$

Используя найденную функцию $F_1(x)$ в качестве $G(x)$ в равенстве (14), находим

$$F_2(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad (1, 2, 3, 4, \ldots) = (n+1)_{n \geq 0}. \tag{16}$$

Продолжая этот процесс дальше, находим:

$$F_3(x) = \frac{1}{(1-x)^3} \quad \Leftrightarrow \quad (1, 3, 6, 10, \ldots) = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)_{n \geq 0}. \tag{17}$$

В приведенных выражениях символ $\Leftrightarrow$ обозначает взаимно-однозначное соответствие между производящей функцией, стоящей слева, и "генерируемой" ею последовательностью, стоящей справа.

Для того чтобы найти для производящей функции $1/(1-x)^m$ генерирующую ее последовательность, нужно использовать равенство (14) и найденный на $(m-1)$-ом шаге результат.

Легко доказать, что общий член генерирующей последовательности для функции $1/(1-x)^m$ равен

$$F_m(x) = \frac{1}{(1-x)^m} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(n+1)\ldots(n+m-1)}{(m-1)!} = C^n_{n+m-1}. \tag{18}$$

Для доказательства этого равенства можно использовать метод математической индукции или формулу разложения в ряд Маклорена функции $1/(1-x)^m$.

§ 3. Рациональные производящие функции

Найденные в предыдущем параграфе производящие функции относятся к классу элементарных рациональных функций. Рациональные производящие функции образуют большой класс производящих функций. Производящие функции, встречающиеся на практике, очень часто принадлежат к этому классу. Кроме того, теория рациональных производящих функций совпадает, по существу, с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Легко убедиться, что производящая функция последовательности Фибоначчи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots,$$

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè