

УДК 512.1, 514.12.01, 517.2, 517.31

ББК 22.141, 22.151.5, 22.161.1

К50

Печатается по решению кафедры высшей математики Института компьютерных технологий и информационной безопасности Южного федерального университета (протокол № 10 от 11 февраля 2021 г.)

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Южного федерального университета *Г. В. Куновых*

доктор физико-математических наук, профессор Таганрогского института имени А. П. Чехова (филиал) «РГЭУ (РИНХ)» *А. А. Илюхин*

Клово, А. Г.

К50 Математика в техническом вузе для 2-го семестра : учебное пособие / А. Г. Клово, И. А. Ляпунова ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2021. – 198 с.

ISBN 978-5-9275-3837-9

Учебное пособие «Математика в техническом вузе для 2-го семестра» задумано как помощник студентам в изучении курса математики. Данная книга является второй частью трёхсеместрового курса математики в техническом вузе и соответствует тому, что изучается во втором семестре.

УДК 512.1, 514.12.01, 517.2, 517.31

ББК 22.141, 22.151.5, 22.161.1

ISBN 978-5-9275-3837-9

© Южный федеральный университет, 2021

© Клово А. Г., Ляпунова И. А., 2021

© Оформление. Макет. Издательство

Южного федерального университета, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	9
ГЛАВА 1. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ	10
Лекция 1. ФНП, предел, непрерывность, частные производные	10
1.1. Евклидово пространство	10
1.2. Функции многих переменных. Предел и непрерывность ФМП	13
1.3. Частная производная, полный дифференциал ФНП. Связь дифференцируемости функции с существованием частных производных	17
Лекция 2. Частные производные и дифференциалы ФНП	22
1.4. Геометрический смысл дифференциала ФМП. Уравнение плоскости, касательной к поверхности $z = f(x, y)$	23
1.5. Дифференцирование сложной функции многих переменных ...	24
1.6. Частные производные высших порядков. Теорема о смешанных производных. Дифференциалы высших порядков	26
Лекция 3. Формула Тейлора и экстремум ФНП	28
1.7. Формула Тейлора для функции многих переменных	28
1.8. Точки экстремума ФНП. Необходимое условие экстремума	31
1.9. Экстремум ФНП, достаточное условие	32
Лекция 4. Матрица квадратичной формы, критерий Сильвестра ...	35
1.10. Матрица второго дифференциала	35
1.11. Критерий Сильвестра знакоопределенности второго дифференциала	38
Лекция 5. Метод наименьших квадратов, условный экстремум, производная по направлению, градиент ФНП	39
1.12. Метод наименьших квадратов	40
1.13. Условный экстремум ФНП	42
1.14. Производная по направлению. Градиент ФНП	43
ГЛАВА 2. КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	50
Лекция 6. Двойной интеграл, его свойства и вычисление	50
2.1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла, его определение	50

Содержание

2.2. Свойства двойного интеграла	51
2.3. Сведение двойного интеграла к повторному	53
Лекция 7. Замена переменных в двойном интеграле, полярная система координат	56
2.4. Общий вид замены переменных в двойном интеграле	56
2.5. Полярная система координат для двойного интеграла	59
Лекция 8. Тройной интеграл, его свойства и вычисление	61
2.6. Задачи, приводящие к понятию тройного интеграла. Определение тройного интеграла	61
2.7. Свойства тройного интеграла	62
2.8. Сведение тройного интеграла к повторному	63
2.9. Замена переменных в тройном интеграле	65
2.10. Цилиндрическая и сферическая системы координат	66
Лекция 9. Криволинейные и поверхностные интегралы 1-го рода	68
2.11. Определение криволинейного интеграла первого рода	69
2.12. Свойства криволинейного интеграла 1-го рода	70
2.13. Сведение криволинейного интеграла 1-го рода к определенному	72
2.14. Поверхностный интеграл первого рода. Его свойства	74
2.15. Сведение поверхностного интеграла первого рода к двойному	76
ГЛАВА 3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ	80
Лекция 10. Криволинейные и поверхностные интегралы 2-го рода	80
3.1. Скалярные и векторные поля	80
3.2. Криволинейные интегралы 2-го рода	81
3.3. Поверхностный интеграл второго рода	85
Лекция 11. Формулы Грина, Остроградского, Стокса	88
3.4. Формула Грина, условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования	88
3.5. Формула Остроградского	92
3.6. Формула Стокса	94
Лекция 12. Операции над скалярными и векторными полями	95
3.7. Градиент функции	95
3.8. Дивергенция	98

Содержание

3.9. Ротор	98
3.10. Операторная запись формул	99
3.11. Операции с градиентом, дивергенцией и ротором	100
ГЛАВА 4. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ	101
Лекция 13. Числовой ряд. Необходимое условие сходимости.	
Признаки сравнения	101
4.1. Определение числового ряда, сумма ряда, необходимый признак сходимости	101
4.2. Признаки сравнения сходимости числового ряда	103
Лекция 14. Признаки сходимости Даламбера, Коши, интегральный признак	105
4.3. Признак сходимости Даламбера	106
4.4. Признак сходимости Коши, радикальный признак Коши	107
4.5. Интегральный признак сходимости числового ряда	110
Лекция 15. Знакопеременные ряды	111
4.6. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов	112
4.7. Знакопеременные ряды, признак Лейбница	113
4.8. Признак Абеля	115
Лекция 16. Степенные ряды	116
4.9. Общие свойства функциональных рядов	116
4.10. Степенной ряд, теорема Абеля, радиус сходимости	118
4.11. Разложение функций в степенные ряды	121
4.12. Комплексные степенные ряды	123
Лекция 17. Тригонометрический ряд Фурье	124
4.13. Ортогональность тригонометрической системы. Ряд Фурье, коэффициенты Фурье	124
4.14. Теорема Дирихле. Разложение периодической функции в ряд Фурье	126
4.15. Чётные и нечётные функции, их разложение в ряд Фурье	128
4.16. Ряд Фурье в комплексной форме	129
4.17. Преобразование Фурье	130
ГЛАВА 5. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	132
Лекция 18. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.	
Общие понятия	132

Содержание

5.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям	132
5.2. Определение дифференциального уравнения, задача Коши	134
5.3. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним	136
Лекция 19. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка	140
5.4. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка, метод вариации произвольной постоянной	140
5.5. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка, метод Бернулли	142
5.6. Уравнение Бернулли	144
Лекция 20. Уравнение в полных дифференциалах и понижение порядка ОДУ	145
5.7. Уравнение в полных дифференциалах	145
5.8. Понижение порядка в дифференциальных уравнениях	148
Лекция 21. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков	149
5.9. Общие свойства линейных дифференциальных уравнений	150
5.10. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	152
Лекция 22. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков	156
5.11. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, специальный вид правой части	156
5.12. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, метод вариации произвольных постоянных	158
ГЛАВА 6. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	161
Лекция 23. Функция комплексного переменного, производная ФКП	161
6.1. Функция комплексного переменного. Действительная и мнимая часть функции	161
6.2. Предел и непрерывность функции. Основные элементарные функции	162
6.3. Производная и дифференциал функции комплексного переменного	163

6.4. Условия Коши–Римана, аналитические функции	164
6.5. Геометрический смысл производной функции комплексного переменного	165
Лекция 24. Интегрирование функций комплексного переменного	165
6.6. Интеграл от функции комплексного переменного. Его свойства	166
6.7. Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей ...	168
6.8. Независимость интеграла от пути интегрирования	169
6.9. Интегральная формула Коши	170
Лекция 25. Ряды Тейлора и Лорана	171
6.10. Бесконечная дифференцируемость функции, аналитической в области	171
6.11. Ряд Тейлора. Разложение основных элементарных функций комплексного переменного в ряд Тейлора	172
6.12. Ряд Лорана, его свойства	173
Лекция 26. Изолированные особые точки и вычет функции	174
6.13. Изолированные особые точки их классификация	175
6.14. Вычет, основная теорема теории вычетов	177
6.15. Вычисление вычета	177
Лекция 27. Использование вычета ФПК	179
6.16. Вычисление интегралов вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ с помощью вычетов	180
6.17. Вычисление интегралов вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin ax dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos ax dx$	183
6.18. Вычисление интегралов вида $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx$ с помощью вычетов	184
Лекция 28. Преобразование Лапласа и его свойства	186
6.19. Преобразование Лапласа	186
6.20. Свойства преобразования Лапласа	188
6.21. Таблица изображений	190
Лекция 29. Элементы операционного исчисления	192
6.22. Решение задачи Коши для ОДУ операционным методом ...	193

Содержание

6.23. Решение систем ОДУ операционным методом	194
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	196
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	197