

УДК 517.9(075)
ББК 22.162я7
К95

Кутузов, А. С.

К95 Введение в функциональный анализ : учебное пособие /
А. С. Кутузов. — Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2020. — 481 с.

ISBN 978-5-4499-0433-1

Учебное пособие предназначено для преподавателей и студентов направления (специальности) «Прикладная математика и информатика». Может быть использовано для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов.

Текст приводится в авторской редакции.

УДК 517.9(075)
ББК 22.162я7

ISBN 978-5-4499-0433-1

© Кутузов А. С., текст, 2020
© Издательство «Директ-Медиа», оформление, 2020

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА.....	5
СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА.....	8
ЧАСТЬ I. ПРОСТРАНСТВА.....	19
РАЗДЕЛ 1. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА.....	19
1.1. Понятия метрики и метрического пространства.....	19
Примеры решения задач (19). Задачи для самостоятельного решения (23)	
1.2. Множества в метрических пространствах. Примеры метрических пространств.....	27
Примеры решения задач (29). Задачи для самостоятельного решения (31)	
1.3. Сходящиеся и фундаментальные последовательности. Полные метрические пространства.....	36
Примеры решения задач (38). Задачи для самостоятельного решения (43)	
1.4. Свойства полных метрических пространств.....	50
Примеры решения задач (53). Задачи для самостоятельного решения (55)	
1.5. Пополнение метрических пространств. Сепарабельные пространства.....	58
Примеры решения задач (59). Задачи для самостоятельного решения (62)	
1.6. Компактные множества.....	63
Примеры решения задач (67). Задачи для самостоятельного решения (68)	
1.7. Непрерывные отображения метрических пространств. Сжимающие отображения.....	71
Примеры решения задач (75). Задачи для самостоятельного решения (79)	
РАЗДЕЛ 2. ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА.....	87
2.1. Линейные пространства.....	87
Примеры решения задач (89). Задачи для самостоятельного решения (92)	
2.2. Нормированные пространства.....	95
Примеры решения задач (98). Задачи для самостоятельного решения (102)	
2.3. Ряды в линейных нормированных пространствах.....	104
Задачи для самостоятельного решения (106)	
2.4. Пространства l_p ($1 \leq p \leq \infty$), c , c_0 и $C[a, b]$	107
Примеры решения задач (110). Задачи для самостоятельного решения (113)	
2.5. Линейные подпространства и плотные множества.....	116
Примеры решения задач (119). Задачи для самостоятельного решения (122)	
2.6. Предкомпактные множества.....	126
Примеры решения задач (129). Задачи для самостоятельного решения (131)	
2.7. Пространства $L_p(E, d\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$	137
Примеры решения задач (140). Задачи для самостоятельного решения (147)	
2.8. Полнота пространств $L_p(E, d\mu)$ при $1 \leq p \leq \infty$	153
2.9. Плотные множества в $L_p(E, d\mu)$, $1 \leq p < \infty$	156
2.10. Предкомпактные множества в $L_2(X)$	164
Примеры решения задач (166). Задачи для самостоятельного решения (168)	
Дополнение. Базисы в линейных пространствах.....	171
РАЗДЕЛ 3. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА.....	175
3.1. Пространства со скалярным произведением.....	175
Примеры решения задач (177). Задачи для самостоятельного решения (180)	
3.2. Проекции векторов в гильбертовых пространствах.....	184
3.3. Ортогональные дополнения и их свойства.....	186
Примеры решения задач (187). Задачи для самостоятельного решения (194)	

3.4. Ряды Фурье в гильбертовых пространствах.....	196
Примеры решения задач (198). Задачи для самостоятельного решения (199)	
3.5. Базисы в гильбертовых пространствах.....	202
Примеры решения задач (206). Задачи для самостоятельного решения (212). Дополнение (215)	
ЧАСТЬ II. ОПЕРАТОРЫ.....	217
РАЗДЕЛ 1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ.....	217
1.1. Понятие линейного ограниченного оператора, его норма.....	217
Примеры решения задач (219). Задачи для самостоятельного решения (233)	
1.2. Пространство линейных ограниченных операторов.....	242
Задачи для самостоятельного решения (244)	
1.3. Последовательности операторов.....	245
Примеры решения задач (248). Задачи для самостоятельного решения (254)	
1.4. Дополнительные задачи и утверждения.....	260
Задачи для самостоятельного решения (269)	
1.5. Образы шаров в банаховых пространствах.....	274
РАЗДЕЛ 2. СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА.....	278
2.1. Функционалы в гильбертовых пространствах.....	278
2.2. Функционалы в нормированных пространствах.....	281
Примеры решения задач (288). Задачи для самостоятельного решения (292)	
2.3. Продолжение линейных функционалов.....	295
Примеры решения задач (298). Задачи для самостоятельного решения (302)	
2.4. Общий вид линейного ограниченного функционала в пространстве $C[a, b]$	308
Примеры решения задач (315). Задачи для самостоятельного решения (316)	
2.5. Слабая и *-слабая сходимости.....	320
Примеры решения задач (327). Задачи для самостоятельного решения (330)	
2.6. Рефлексивные пространства. Двойственность.....	335
Примеры решения задач (338). Задачи для самостоятельного решения (339)	
2.7. Сопряженные операторы.....	342
Примеры решения задач (345). Задачи для самостоятельного решения (350) Дополнение. Комплексный вариант теоремы Хана-Банаха. Слабая замкнутость выпуклого множества.....	355
РАЗДЕЛ 3. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ.....	357
3.1. Обратные операторы.....	357
Примеры решения задач (362). Задачи для самостоятельного решения (369)	
3.2. Замкнутые операторы.....	374
Примеры решения задач (375). Задачи для самостоятельного решения (377)	
3.3. Резольвентное множество и спектр оператора.....	380
Примеры решения задач (387). Задачи для самостоятельного решения (401)	
3.4. Вполне непрерывные операторы.....	409
Примеры решения задач (414). Задачи для самостоятельного решения (425)	
3.5. Фредгольмовы операторы.....	433
Примеры решения задач (436). Задачи для самостоятельного решения (439)	
3.6. Спектры самосопряженных и вполне непрерывных операторов.....	441
Примеры решения задач (450). Задачи для самостоятельного решения (455) Дополнение. Линейные интегральные уравнения.....	460
Примеры решения задач (463). Задачи для самостоятельного решения (474)	
Рекомендуемая литература.....	478