Казанский институт (филиал)
Российского государственного торгово-экономического университета

кафедра информатики и высшей математики

ТАЛЫЗИН В.А.

МАТЕМАТИКА-4

учебно-методическое пособие

КАЗАНЬ-2003г.

Тема 1. Модели управления товарными запасами

Задачи управления запасами составляют многочисленный класс экономических задач. При этом используются различные модели управления запасами. Рассмотрим некоторые из них.

Модель управления одно-номенклатурными запасами без дефицита.

Пополнение склада товаром одной номенклатуры происходит партиями объема s (ед. товара) дискретно во времени с интервалом поставок τ . Завоз товара выполняется без задержек, мгновенно. Дефицит товара исключается, а объем склада считается неограниченным.

Затраты на доставку одной партии товара не зависят от объема партии и составляют k денежных ед., а затраты на хранение одной единицы товара в единицу времени равны c_1 денежных ед. За плановый период T единиц времени требуется осуществить поставку Q единиц товара. Спрос на товар является постоянным и поэтому объем продаж в единицу времени (интенсивность) $\mu = \frac{Q}{T} = const$.

Задача управления товарными запасами состоит в определении такого объема партии s , при котором суммарные затраты на создание и хранение товарного запаса были бы минимальными.

Обозначим через C суммарные затраты, $C_з$ - затраты на доставку товара, C_x - затраты на хранение. Тогда после формализации получим следующую математическую модель задачи: требуется найти значение переменной s так, чтобы функция

$$C = C_з + C_x = k\frac{Q}{s} + c_1\frac{sT}{2} \qquad (1)$$

принимала наименьшее значение.

Оптимальное решение задачи определяется формулой Уилсона

$$s^o = \sqrt{\frac{2kQ}{c_1 T}}. \qquad (2)$$

По найденному оптимальному объему партии находятся другие оптимальные параметры товароснабжения:

- число поставок за плановый период $n^o = \frac{Q}{s^o}$;
- интервал между поставками $\tau^o = \frac{T}{n^o}$;
- средний текущий запас на складе $\bar{z}^o = \frac{s^o}{2}$;
- минимальные суммарные затраты $C^o = \sqrt{2kc_1QT}$.

Задача 1. Потребность микрорайона г. Казани, обслуживаемого торговым предприятием, в сахаре определена на плановый период $T = 2$ года в объеме 640 т. Стоимость организации заказа и доставки одной партии в магазин равна $k = 45$ рублей за партию. Издержки хранения товара составляют $c_1 = 0{,}08$ руб за 1 кг в год. Полагая, что спрос на сахар стабильный, определить оптимальные показатели управления товарными запасами: $s^o, n^o, \bar{z}^o, \tau^o, C^o$.

Решение. Оптимальные значения искомых показателей находим из условия минимума суммарных затрат (1). Единицей времени будем считать год.

Размер одной поставки определим по формуле Уилсона (2)

$$s^o = \sqrt{\frac{2kQ}{c_1 T}} = \sqrt{\frac{2\cdot 45\cdot 640000}{0{,}08\cdot 2}} = 18974 \text{ (кг)}$$

и далее вычислим другие параметры:

- число поставок за планируемый период $T = 2$ года

$$n^o = \frac{Q}{s^o} = \frac{640000}{18974} = 33{,}73 \approx 34;$$

- объем одной поставки в пересчете для целого значения n^o

$$s^o = \frac{Q}{n^o} = \frac{640000}{34} = 18823{,}5 \approx 18824 \text{ (кг)};$$

- средний текущий запас на складе

$$\bar{z}^o = \frac{1}{2} s^o = \frac{18824}{2} = 9412 \text{ (кг)};$$

- интервал между поставками в днях

$$\tau^o = \frac{T \cdot 365}{n^o} = \frac{2 \cdot 365}{34} = 21{,}47 \approx 21{,}5 \text{ (дн.)};$$

- затраты на хранение

$$C_x^o = c_1 \frac{s^o}{2} T = 0{,}08 \cdot \frac{18824}{2} \cdot 2 = 1505{,}9 \text{ (руб)};$$

- затраты на транспортировку сахара

$$C_з^o = k \frac{Q}{s^o} = 45 \cdot \frac{640000}{18824} = 1529{,}9 \text{ (руб)};$$

- минимальные суммарные издержки

$$C^o = \sqrt{2kc_1QT} = \sqrt{2 \cdot 45 \cdot 0{,}08 \cdot 640000} \approx 3036 \text{ (руб)}.$$

Оптимальные значения C_x^o и $C_з^o$, согласно теории, должны совпадать, однако полученные расчетные значения $C_x^o = 1505{,}9$ и $C_з^o = 1529{,}9$ не равны, что связано с округлением числа поставок n^o до целого значения.

Модель управления одно-номенклатурными запасами с дефицитом.

В отличие от содержательной постановки предыдущей задачи на складе допускается наличие дефицита, который при очередной поставке мгновенно ликвидируется, а величина потерь на единицу товара в единицу времени из-за неудовлетворенного спроса составляет $c_д$ денежных единиц.

В данной модели в функцию суммарных затрат C наряду с $C_з$ и C_x необходимо ввести $C_д$ - затраты на штраф из-за дефицита.

В итоге после формализации суммарные издержки за плановый период T можно выразить функцией двух переменных

$$C(z,s) = k\frac{Q}{s} + c_1\frac{z^2T}{2s} + c_д\frac{(s-z)^2T}{2s}, \qquad (3)$$

где z - максимальный запас товара на складе, s - объем завозимой партии товара, $(s-z)$ - объем накопленного дефицита между поставками товара τ.

Оптимальные значения s и z находятся из условия минимума функции (3):

$$s_д^o = \sqrt{\frac{2kQ}{c_1T\rho_д}}, \qquad (4)$$

$$z^o = s_д^o \rho_д, \qquad (5)$$

где $\rho_д = \dfrac{c_д}{c_д + c_1}$ - величина, называемая *плотностью убытков* из-за неудовлетворенного спроса.

Отсюда определяются оптимальные значения других параметров товароснабжения для модели управления запасов с дефицитом:

- число поставок за плановый период $n_\partial^o = \dfrac{Q}{s_\partial^o}$;
- интервал поставок $\tau_\partial^o = \dfrac{T}{n_\partial^o}$;
- время наличия дефицита $t_\partial^o = \dfrac{s_\partial^o - z^o}{s_\partial^o}\tau_\partial^o$;
- суммарные издержки $C^o = \sqrt{2kc_1QT\rho_\partial}$.

Задача 2. В задаче 1 определить показатели управления запасами сахара при наличии дефицита, если потери из-за несвоевременной реализации единицы товара составляют $c_\partial = 0{,}38$ руб. за 1 кг в год.

Решение. В данной модели решение находится из условия минимума суммарных затрат (3). Определим вначале плотность убытков из-за дефицита

$$\rho_\partial = \frac{c_\partial}{c_1 + c_\partial} = \frac{0{,}38}{0{,}08 + 0{,}38} = 0{,}826 .$$

Далее вычислим оптимальные параметры товародвижения:

- объем партии $s_\partial^o = \sqrt{\dfrac{2kQ}{c_1T\rho_\partial}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot 45\cdot 640000}{0{,}08\cdot 2\cdot 0{,}826}} = 20877$ (кг);

- число поставок $n_\partial^o = \dfrac{Q}{s_\partial^o} = \dfrac{640000}{20877} = 30{,}65 \approx 31$;

- объем партии в пересчете для целого числа поставок $s_\partial^o = \dfrac{Q}{n_\partial^o} = \dfrac{640000}{31} = 20645$ (кг);

- максимальный запас сахара на складе $z_\partial^o = \rho_\partial \cdot s_\partial^o = 0{,}826 \cdot 20645 = 17053$ (кг);

- средний текущий запас сахара на складе $\bar{z}_\partial^o = \dfrac{1}{2} z_\partial^o = \dfrac{1}{2}\cdot 17053 = 8526{,}5$ (кг);

- интервал поставок в днях $\tau_\partial^o = \dfrac{T\cdot 365}{n_\partial^o} = \dfrac{2\cdot 365}{31} = 23{,}5$ (дн.);

- время наличия дефицита $t_\partial = \dfrac{s_\partial^o - z_\partial^o}{s_\partial^o}\cdot \tau_\partial^o = \dfrac{20645 - 17053}{20645}\cdot 23{,}5 = 4{,}09$ (дн.);

- затраты на хранение $C_x^o = c_1 \dfrac{z_\partial^o}{2}\cdot T = 0{,}08\cdot \dfrac{17053}{2}\cdot 2 = 1364{,}2$ (руб);

- затраты на транспортировку $C_з^o = k\cdot n_\partial^o = 45\cdot 31 = 1395$ (руб).

- убытки из-за дефицита $C_\partial^o = c_\partial \cdot \dfrac{T\left(s_\partial^o - z_\partial^o\right)^2}{2s_\partial^o} = 0{,}38\dfrac{2(20645 - 17093)^2}{2\cdot 20645} = 237{,}5$ (руб);

- суммарные издержки $C^o = C_x^o + C_з^o + C_\partial^o = 1364{,}2 + 1395 + 237{,}5 = 2996{,}7$ (руб).

Из приведенных расчетов видно, что оптимальный объем поставки в задаче с дефицитом больше, чем в задаче без дефицита. Это приводит к снижению затрат на транспортировку товара. В данном примере для задачи с дефицитом также меньше затраты на хранение, что связано с уменьшением среднего текущего запаса сахара $(\bar{z}_\partial^o < \bar{z}^o)$. Убытки из-за дефицита в рассматриваемом примере невелики из-за небольшого значения удельного коэффициента c_∂. Поэтому и суммарные издержки (2996,7) в задаче с дефицитом меньше, чем в задаче без дефицита (3036). Например, если коэффициент $c_\partial = 0{,}7$, то убытки из-за дефицита составят уже величину 437,5 руб и общие затраты в 3312,7 руб будут больше, чем в задаче без дефицита.

Модель управления многономенклатурными запасами.

Номенклатура товаров, поступающих на склад в течение планового периода T, включает n наименований. Спрос по каждому виду номенклатуры является постоянным и за указанное время требуется поставить Q_i единиц товара i-го вида номенклатуры $(i = 1,2,\ldots,n)$.

Предполагается, что поставки осуществляются мгновенно с интервалом поставок τ_i для i-го вида номенклатуры, дефицит товаров не допускается и заказы по разным видам номенклатуры товаров выполняются независимо. Удельные затраты за доставку составляют k_i (ден. ед.), а на хранение c_i (ден. ед.) по i-у виду номенклатуры товаров. Средний текущий суммарный уровень запасов по всем видам номенклатуры товаров не должен превышать G единиц, что связано с ограниченностью емкости склада.

Пусть s_i - объем завозимой партии для i-го вида номенклатуры товаров. Тогда общие затраты по всем видам номенклатуры за время T определятся выражением

$$C = \sum_{i=1}^{n} k_i \frac{Q_i}{s_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i s_i T}{2}. \qquad (4)$$

Требуется найти минимум функции (4) при следующем ограничении

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} s_i \le G. \qquad (5)$$

Вначале задача решается без учета ограничений (5) и определяется оптимальный размер партий каждого вида номенклатуры по формуле Уилсона

$$s_i^o = \sqrt{\frac{2k_i Q_i}{c_i T}}, \quad i = 1,2,\ldots,n. \qquad (6)$$

Если условие (5) для объемов $s_i = s_i^o$ выполняется, тогда найденные по формуле (6) значения объемов партий являются решением задачи. В противном случае методом множителей Лагранжа решается задача (4),(5) на условный экстремум. В этом случае наилучшее решение находится по формуле

$$s_i^* = \sqrt{\frac{2k_i Q_i}{(c_i + 2\lambda^*)T}}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \qquad (7)$$

где множитель Лагранжа λ^* определяется путем решения нелинейного уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{2k_i Q_i}{(c_i + 2\lambda^*)T}} - 2G = 0. \qquad (8)$$

Задача 3. На базу АО «Спортинвентарь» в течение двух лет должны быть поставлены велосипеды в следующем ассортименте, затратах на поставку одной партии k_i, затратах на хранения одной единицы в течение месяца c_i и объемах поставок Q_i (ед.):

Велосипеды	k_i (руб)	c_i (руб)	Q_i (ед.)
Дорожные	1000	1,0	200
Спортивные	1500	1,5	90
Гоночные	1800	2,0	70
Детские	800	0,5	150
Подростковые	900	0,8	100