

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

**С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов**

# МЕТОД КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

*Учебное пособие*

*Рекомендовано  
Научно-методическим советом университета  
для студентов, обучающихся по специальностям Математика и  
Прикладная математика и информатика*

ЯРОСЛАВЛЬ 2011

УДК 517.925+517.928  
ББК 3 965.6я 73  
Г 55

*Рекомендовано*  
*Редакционно-издательским советом университета*  
*в качестве учебного издания. План 2010 / 2011 учебного года*

Рецензенты:

Соболев В. А., доктор физико-математических наук, профессор;  
кафедра прикладной математики и вычислительной техники  
Ярославского государственного технического университета

**Глызин, С. Д.** Метод квазинормальных форм: учебное пособие /  
С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов; Яросл. гос. ун-т. им. П. Г. Демидова. –  
Г 55 Ярославль: ЯрГУ, 2011. – 104 с.  
ISBN 978-5-8397-0803-7

Изложена теория квазинормальных форм в приложении к край-  
вым задачам параболического и гиперболического типов и диффе-  
ренциальным уравнениям с большим запаздыванием. Приводится  
эффективный алгоритм построения квазинормальной формы и вы-  
числения ее коэффициентов.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по  
специальностям 010100 Математика и 010200.65 Прикладная ма-  
тематика и информатика, дисциплина «Численные методы анализа  
динамических систем» (блок ДС), очной формы обучения.

Рис. 4. Библиогр.: 64 назв.

УДК 517.925+517.928  
ББК 3 965.6я 73

ISBN 978-5-8397-0803-7

© Ярославский  
государственный университет  
им. П. Г. Демидова, 2011

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1. Квазинормальные формы систем параболического типа</b>	<b>7</b>
1.1. Алгоритмическая часть . . . . .	7
1.2. Основной результат . . . . .	12
1.3. Пример уравнения Хатчинсона . . . . .	22
<b>2. Метод квазинормальных форм в задачах гиперболического типа</b>	<b>33</b>
2.1. Высокомодовая буферность в $RCLG$ -линии . . . . .	33
2.2. Явление буферности в $RCLG$ -линии с малыми искажениями	39
2.3. Автоколебания в системе Витта при резонансном спектре собственных частот . . . . .	44
2.4. Заключительные замечания . . . . .	51
<b>3. Метод квазинормальных форм для систем с запаздыванием</b>	<b>59</b>
3.1. Постановка проблемы . . . . .	59
3.2. Основной результат . . . . .	62
3.3. Доказательство теоремы 3.1 . . . . .	73
3.4. Заключение . . . . .	94
<b>Литература</b>	<b>98</b>

# Введение

В конце 19 — начале 20 века А. Пуанкаре поставил задачу качественного анализа дифференциальных уравнений. Успехи современных математических теорий, касающихся исследования поведения нелинейных динамических систем, так или иначе связаны с решением именно этой задачи. В ряду инструментов, разработанных для качественного анализа систем нелинейных дифференциальных уравнений, важное место занимает метод нормальных форм. Идея метода была высказана Пуанкаре в его диссертации и состояла в нахождении такого класса автономных динамических систем, которые можно было бы с помощью специальных замен свести к линейным. На этом пути было введено понятие резонансности собственных чисел матрицы линейной части системы и доказано, что в случае отсутствия таких резонансов сведение возможно. Позднее А. Дюлак выполнил обобщение этого результата на резонансный случай и показал, что в этой ситуации простейшим видом преобразованной системы является выражение, содержащее в правой части, наряду с линейными слагаемыми, еще и не уничтожаемые заменами резонансные члены. Такую систему называют нормальной формой, и ее построение позволяет успешно проанализировать локальную динамику изучаемой системы.

Однако по-настоящему действенным метод нормальных форм стал после работ, принадлежащих Н.М. Крылову, Н.Н. Боголюбову и Ю.А. Митропольскому [2, 43, 48], в которых разрабатывались асимптотические методы нелинейных колебаний. Нормализация динамической системы на устойчивом интегральном многообразии позволяет выделить систему малой размерности, отвечающую за локальные свойства исходной системы. В настоящее время методу нормальных форм посвящено большое число различных исследований, отметим здесь лишь [3, 4, 9, 57, 58, 64].

Сказанное делает актуальной разработку по возможности более экономного алгоритма построения нормальной формы. Заметим, что наиболее интересные выводы о качественном поведении получаются при изменении параметров динамической системы в окрестности критических значений, в

этом случае величина надкритичности служит естественным малым параметром, по которому удобно строить асимптотические формулы устойчивых решений изучаемой задачи. В то же время нормальная форма строится именно при критических значениях параметров, поэтому впоследствии возникает задача такого масштабирования возмущенной нормальной формы, чтобы полученная система могла быть удобно проанализирована, например, численными методами. В пособии [7] предлагается алгоритм, в ходе выполнения которого укороченная нормальная форма возникает из условий разрешимости для одного из слагаемых нормирующей замены, при этом она уже оказывается подходящим образом масштабированной по входящим переменным.

В большом числе математических моделей, пространство состояний которых бесконечномерно, естественным образом возникает ситуация, когда в задаче об устойчивости решений такой модели имеет место бесконечномерное вырождение. Такая ситуация возможна в краевых задачах параболического и гиперболического типов, а также в уравнениях с большим запаздыванием.

Отметим, что в случае конечномерного вырождения даже в ситуации уравнений с распределенными параметрами может быть обосновано применение классических методов нелинейного анализа — теоремы о центральном многообразии и метода нормальных форм, которые приводят к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Естественное предположить, что при бесконечномерном вырождении, пользуясь аналогичными алгоритмами, можно получить бесконечномерные системы уравнений, а затем привести их к некоторым краевым задачам, устойчивые или дихотомичные режимы которых имеют соответствием режимы исходной системы той же устойчивости.

Возникает закономерный вопрос о том, можно ли получить некоторые простейшие нелинейные краевые задачи в результате процесса некой «формальной нормализации». Начиная с Г. Хакена, этому вопросу уделяли большое внимание [54], причем обычно *a priori* считалось, что решения исходной динамической системы зависят от «быстрых» и «медленных» переменных, а сама система рассматривалась в окрестности точки какой-нибудь бифуркации. Далее проводилось усреднение по быстрым переменным, в результате которого получалось модельное уравнение, зависящее только от медленных переменных. Таким способом были выведены, например, уравнение Гинзбурга–Ландау

$$\xi_t = \kappa_0 \xi_{xx} + \kappa_1 \xi - \kappa_2 |\xi|^2 \xi, \quad (1)$$