Опредѣленіе движенія жидкости при какомъ-нибудь условіи, данномъ на линіи тока.

Н. Е. Жуковскаго.

§ 1. Въ нашей работѣ, доложенной на VIII съѣздѣ русскихъ естествоиспытателей и врачей [1]), мы показали, какимъ образомъ понятіе объ *образующихъ* и *направляющихъ* сѣтяхъ можетъ лечь въ основаніе рѣшенія задачъ на опредѣленіе теченій жидкости при постоянной скорости, данной на неизвѣстной линіи тока [2]). Въ этой замѣткѣ мы имѣемъ въ виду распространить упомянутый методъ изслѣдованія на тѣ случаи, въ которыхъ на граничной линіи тока должна быть удовлетворена какая-нибудь зависимость между скоростью v и угломъ θ ея наклоненія къ оси ox.

§ 2. Во всѣхъ изслѣдованіяхъ о свободныхъ струяхъ предполагается, что на жидкость не дѣйствуютъ никакія силы; теперь же мы будемъ разсматривать жидкость подъ дѣйствіемъ тяжести. Пусть направленіе оси ox совпадаетъ съ направленіемъ силы тяжести. Скорость жидкости на контурѣ струи выразится формулою:

$$v^2 = 2gx + const., \tag{1}$$

[1]) «Видоизмѣненіе метода Кирхгоффа для опредѣленія теченія жидкости въ двухъ измѣреніяхъ при постоянной скорости, данной на неизвѣстной линіи тока». Математическій Сборникъ, т. XV, 1890.

[2]) Почти одновременно съ нашимъ докладомъ былъ сдѣланъ въ Лондонскомъ королевскомъ обществѣ докладъ сочиненія Michell «On the theory of free stream lines» (Philosophical transactions of the royal society of London, Vol. 181, 1890), въ которомъ авторъ соединяетъ методъ Кирхгоффа съ конформными преобразованіями Шварца и Христофеля и рѣшаетъ такимъ образомъ нѣкоторыя изъ рѣшенныхъ нами задачъ. Просмотрѣвъ сочиненіе Michell, мы остаемся при мнѣніи, что способъ образующихъ и направляющихъ сѣтей является самымъ удобнымъ для рѣшенія разсматриваемыхъ задачъ.

гдѣ g напряженіе тяжести. Беремъ дифференціалъ отъ обѣихъ частей этой формулы, переходя по контуру струи въ направленіи теченія жидкости на элементъ дуги ds. Получимъ:

$$vdv = gdx = gdscs\theta = \frac{gcs\theta d\varphi}{v},$$

гдѣ φ потенціалъ скоростей. Изъ этой формулы слѣдуетъ, что

$$v^3 = 3g\int cs\theta d\varphi$$

или

$$\vartheta = lg\left(\frac{w}{v}\right) = -\frac{1}{3}\, lg\left(\frac{3g}{w^3}\int cs\theta d\varphi\right), \tag{2}$$

гдѣ w есть нѣкоторая постоянная скорость.

Назовемъ чрезъ ψ количество протекающей жидкости и разсмотримъ двѣ мнимыя величины $\varphi + \psi i$ и $\vartheta + \theta i$, по которымъ составляются образующая и направляющая сѣть [1]). Полагаемъ, что обѣ эти мнимыя величины суть функціи перемѣннаго $u = \xi + \eta i$, представляющаго точки нѣкоторой полуплоскости (ξ придаемъ всякія дѣйствительныя значенія, а η — только положительныя), и пишемъ:

$$\begin{aligned} &\varphi + \psi i = \chi(u), \\ &\vartheta + \theta i = \phi(u) + i\phi_1(u). \end{aligned} \tag{3}$$

При этомъ функцію $\chi(u)$ выбираемъ такъ, чтобы всѣ ея точки безконечностей лежали на оси ξ или въ безконечности и чтобы вся ось ξ представлялась линіями $\psi = const.$ Функціи $\phi(u)$ и $\phi_1(u)$ выбираемъ такъ, чтобы онѣ имѣли только логариѳмическія точки безконечности, лежащія на оси ξ или въ безконечности, и чтобы всѣ точки оси ξ удовлетворяли или условію $\theta = const.$, или условію (2).

Первое условіе будетъ удовлетворено на тѣхъ частяхъ оси ξ, на которыхъ функція $\phi(u)$ дѣйствительна, а функція $\phi_1(u)$ есть чисто мнимая величина. Положимъ, что на остальныхъ отрѣзкахъ оси ξ функціи $\phi(u)$ и $\phi_1(u)$ будутъ дѣйствительны и постараемся выбрать ихъ такъ, чтобы удовлетворить второму условію.

Сдѣлаемъ подстановку:

$$\phi_1(u) = arccs(fu)$$

и опредѣлимъ $\phi(u)$ съ помощію $f(u)$ и $\chi(u)$ по уравненію (2). Получимъ:

$$\phi(u) = -\frac{1}{3}\, lg\left(\frac{3g}{w^3}\int f(u)\chi'(u)du\right),$$

[1]) Видоизмѣненіе метода Кирхгоффа, § 3.

такъ что направляющая сѣть искомаго теченія будетъ дана формулою:

$$\vartheta + \theta i = -\frac{1}{3}\, lg\left(\frac{3g}{w^3}\int f(u)\chi'(u)du\right) + i\,arccs[f(u)]. \qquad (4)$$

Если бы на нѣкоторыхъ отрѣзкахъ оси ξ функція $\phi_1(u)$ была бы дѣйствительна, а функція $\phi(u)$ состояла изъ дѣйствительной части и мнимой части $\pm\pi i$, то и тогда уравненіе (2) было бы удовлетворено, потому что, присоединяя $\pm\pi$ къ углу θ въ форм. (2), мы этимъ сдѣлаемъ величину, стоящую подъ знакомъ логариѳма, изъ отрицательной положительной.

Весь успѣхъ рѣшенія будетъ теперь зависѣть отъ удачнаго выбора функцій $\chi(u)$ и $f(u)$.

§ 3. Положимъ, что

$$f(u) = \frac{u}{c},\ \chi(u) = \frac{w^3}{2g}\,\frac{u^2}{c^2}. \qquad (5)$$

По форм. (4) найдемъ:

$$\vartheta + \theta i = -\, lg\left(\frac{u}{c}\right) + i\,arccs\left(\frac{u}{c}\right). \qquad (6)$$

Изъ второй форм. (5) видимъ, что образующая сѣть въ сдѣланномъ предположеніи состоитъ изъ равностороннихъ гиперболъ, данныхъ уравненіями:

$$\varphi = \frac{w^3}{2gc^2}\,(\xi^2 - \eta^2),\ \psi = \frac{w^3}{gc^2}\,\xi\eta. \qquad (7)$$

Линія тока $\psi = o$ представляется въ этой сѣти верхнею половиною оси ординатъ и правою и лѣвою половиною оси абсциссъ. Передвиженія по гиперболамъ $\psi = const.$ въ направленіи убывающаго η соотвѣтствуютъ измѣненію φ отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Параметры ϑ и θ направляющей сѣти представятся у насъ разностями параметровъ нѣкоторой эллиптической и полярной сѣти, такъ какъ, положивъ:

$$\xi = ce^{\vartheta_1} cs\theta_1,\qquad \eta = ce^{\vartheta_1} sn\theta_1, \qquad (8)$$

$$\xi = c.cs\theta_2 csh\vartheta_2,\ \ \eta = c.sn\theta_2 snh\vartheta_2, \qquad (9)$$

найдемъ на основаніи форм. (8), что

$$\begin{aligned}\theta &= -\theta_1 + \theta_2,\\ \vartheta &= -\vartheta_1 + \vartheta_2.\end{aligned} \qquad (10)$$

*