

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73-1+22.172я73-1
К79

Р е ц е н з е н т ы:

*кафедра математической статистики и эконометрики
Московского государственного университета экономики,
статистики и информатики (МЭСИ)*
(зав. кафедрой д-р экон. наук, проф. В.С. Мхитарян);
д-р физ.-мат. наук, проф. В.Ф. Гапошкин;
канд. техн. наук, доц. Г.Л. Эпштейн

Главный редактор издательства Н.Д. Эриашвили,
кандидат юридических наук, доктор экономических наук, профессор,
лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники

Кремер, Наум Шевелевич.

К79 Теория вероятностей и математическая статистика:
учебник для студентов вузов, обучающихся по экономиче-
ским специальностям / Н.Ш. Кремер. — 3-е изд., перераб.
и доп. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2015. — 551 с. — (Серия
«Золотой фонд российских учебников»).

ISBN 978-5-238-01270-4

Агентство СІР РГБ

Эта книга не только учебник, но и краткое руководство к решению задач. Излагаемые основы теории вероятностей и математической статистики сопровождаются большим количеством задач (в том числе экономических), приводимых с решениями и для самостоятельной работы. При этом упор делается на основные понятия курса, их теоретико-вероятностный смысл и применение. Приводятся примеры использования вероятностных и математико-статистических методов в задачах массового обслуживания и моделях финансового рынка.

Для студентов и аспирантов экономических специальностей и направлений, а также преподавателей вузов, научных сотрудников и экономистов.

ББК 22.171я73-1+22.172я73-1

ISBN 978-5-238-01270-4

© Н.Ш. Кремер, 2000, 2003, 2007
© ИЗДАТЕЛЬСТВО ЮНИТИ-ДАНА, 2000, 2003, 2007
Принадлежит исключительное право на использование и распространение издания.
Воспроизведение всей книги или любой ее части любыми средствами или в какой-либо форме, в том числе в Интернет-сети, запрещается без письменного разрешения издательства.
© Оформление «ЮНИТИ-ДАНА», 2007

Оглавление

| | |
|---|-----------|
| Предисловие | 10 |
| Введение | 12 |
| Раздел 1. Теория вероятностей | 15 |
| Глава 1. Основные понятия и теоремы теории вероятностей | 16 |
| 1.1. Классификация событий | 16 |
| 1.2. Классическое определение вероятности | 18 |
| 1.3. Статистическое определение вероятности | 20 |
| 1.4. Геометрическое определение вероятности | 22 |
| 1.5. Элементы комбинаторики | 23 |
| 1.6. Непосредственное вычисление вероятностей | 27 |
| 1.7. Действия над событиями | 33 |
| 1.8. Теорема сложения вероятностей | 36 |
| 1.9. Условная вероятность события. Теорема умножения вероятностей. Независимые события | 37 |
| 1.10. Решение задач | 45 |
| 1.11. Формула полной вероятности. Формула Байеса | 51 |
| 1.12. Теоретико-множественная трактовка основных понятий и аксиоматическое построение теории вероятностей | 56 |
| Упражнения | 61 |
| Глава 2. Повторные независимые испытания | 68 |
| 2.1. Формула Бернулли | 68 |
| 2.2. Формула Пуассона | 71 |
| 2.3. Локальная и интегральная формулы Муавра—Лапласа | 72 |
| 2.4. Решение задач | 78 |
| 2.5. Полиномиальная схема | 82 |
| Упражнения | 84 |
| Глава 3. Случайные величины | 87 |
| 3.1. Понятие случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины | 87 |
| 3.2. Математические операции над случайными величинами | 91 |
| 3.3. Математическое ожидание дискретной случайной величины | 94 |
| 3.4. Дисперсия дискретной случайной величины | 98 |
| 3.5. Функция распределения случайной величины | 103 |
| 3.6. Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности | 106 |

| | |
|--|------------|
| 3.7. Мода и медиана. Квантили. Моменты случайных величин. Асимметрия и эксцесс | 114 |
| 3.8. Производящая функция | 119 |
| 3.9. Решение задач | 121 |
| Упражнения | 133 |
| Глава 4. Основные законы распределения | 141 |
| 4.1. Биномиальный закон распределения | 141 |
| 4.2. Закон распределения Пуассона | 145 |
| 4.3. Геометрическое распределение и его обобщения | 148 |
| 4.4. Гипергеометрическое распределение | 150 |
| 4.5. Равномерный закон распределения | 152 |
| 4.6. Показательный (экспоненциальный) закон распределения | 154 |
| 4.7. Нормальный закон распределения | 158 |
| 4.8. Логарифмически-нормальное распределение | 167 |
| 4.9. Распределение некоторых случайных величин, представляющих функции нормальных величин | 169 |
| Упражнения | 172 |
| Глава 5. Многомерные случайные величины | 175 |
| 5.1. Понятие многомерной случайной величины и закон ее распределения | 175 |
| 5.2. Функция распределения многомерной случайной величины | 179 |
| 5.3. Плотность вероятности двумерной случайной величины | 182 |
| 5.4. Условные законы распределения. Числовые характеристики двумерной случайной величины. Регрессия | 188 |
| 5.5. Зависимые и независимые случайные величины | 192 |
| 5.6. Ковариация и коэффициент корреляции | 195 |
| 5.7. Двумерный (n -мерный) нормальный закон распределения | 202 |
| 5.8. Функция случайных величин. Композиция законов распределения | 207 |
| Упражнения | 213 |
| Глава 6. Закон больших чисел и предельные теоремы | 218 |
| 6.1. Неравенство Маркова (лемма Чебышева) | 218 |
| 6.2. Неравенство Чебышева | 220 |
| 6.3. Теорема Чебышева | 223 |
| 6.4. Теорема Бернулли | 229 |
| 6.5. Центральная предельная теорема | 231 |
| Упражнения | 236 |

| | |
|---|------------|
| Глава 7. Элементы теории случайных процессов и теории массового обслуживания | 238 |
| 7.1. Определение случайного процесса и его характеристики | 238 |
| 7.2. Марковские случайные процессы с дискретными состояниями | 241 |
| 7.3. Основные понятия теории массового обслуживания | 245 |
| 7.4. Потоки событий | 246 |
| 7.5. Уравнения Колмогорова. Предельные вероятности состояний | 250 |
| 7.6. Процессы гибели и размножения | 254 |
| 7.7. СМО с отказами | 256 |
| 7.8. Понятие о методе статистических испытаний (методе Монте-Карло) | 261 |
| Упражнения | 263 |

Раздел II. Математическая статистика 266

| | |
|---|------------|
| Глава 8. Вариационные ряды и их характеристики | 267 |
| 8.1. Вариационные ряды и их графическое изображение | 267 |
| 8.2. Средние величины | 272 |
| 8.3. Показатели вариации | 275 |
| 8.4. Упрощенный способ расчета средней арифметической и дисперсии | 279 |
| 8.5. Начальные и центральные моменты вариационного ряда | 281 |
| Упражнения | 284 |

| | |
|---|------------|
| Глава 9. Основы математической теории выборочного метода | 286 |
| 9.1. Общие сведения о выборочном методе | 286 |
| 9.2. Понятие оценки параметров | 289 |
| 9.3. Методы нахождения оценок | 293 |
| 9.4. Оценка параметров генеральной совокупности по собственно-случайной выборке | 297 |
| 9.5. Определение эффективных оценок с помощью неравенства Рао—Крамера—Френше | 305 |
| 9.6. Понятие интервального оценивания. Доверительная вероятность и предельная ошибка выборки | 308 |
| 9.7. Оценка характеристик генеральной совокупности по малой выборке | 318 |
| Упражнения | 327 |

| | |
|--|------------|
| Глава 10. Проверка статистических гипотез | 330 |
| 10.1. Принцип практической уверенности | 330 |
| 10.2. Статистическая гипотеза и общая схема ее проверки | 331 |
| 10.3. Проверка гипотез о равенстве средних двух и более совокупностей | 339 |

| | |
|---|------------|
| 10.4. Проверка гипотез о равенстве долей признака в двух и более совокупностях | 345 |
| 10.5. Проверка гипотез о равенстве дисперсий двух и более совокупностей | 348 |
| 10.6. Проверка гипотез о числовых значениях параметров | 352 |
| 10.7. Построение теоретического закона распределения по опытным данным. Проверка гипотез о законе распределения | 357 |
| 10.8. Проверка гипотез об однородности выборок | 366 |
| 10.9. Понятие о проверке гипотез методом последовательного анализа | 372 |
| Упражнения | 375 |
| Глава 11. Дисперсионный анализ | 379 |
| 11.1. Однофакторный дисперсионный анализ | 379 |
| 11.2. Понятие о двухфакторном дисперсионном анализе | 387 |
| Упражнения | 393 |
| Глава 12. Корреляционный анализ | 395 |
| 12.1. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости | 395 |
| 12.2. Линейная парная регрессия | 398 |
| 12.3. Коэффициент корреляции | 406 |
| 12.4. Основные положения корреляционного анализа. Двумерная модель | 412 |
| 12.5. Проверка значимости и интервальная оценка параметров связи | 415 |
| 12.6. Корреляционное отношение и индекс корреляции | 419 |
| 12.7. Понятие о многомерном корреляционном анализе. Множественный и частный коэффициенты корреляции | 424 |
| 12.8. Ранговая корреляция | 429 |
| Упражнения | 436 |
| Глава 13. Регрессионный анализ | 439 |
| 13.1. Основные положения регрессионного анализа. Парная регрессионная модель | 439 |
| 13.2. Интервальная оценка функции регрессии | 441 |
| 13.3. Проверка значимости уравнения регрессии. Интервальная оценка параметров парной модели | 446 |
| 13.4. Нелинейная регрессия | 450 |
| 13.5. Множественный регрессионный анализ | 454 |
| 13.6. Ковариационная матрица и ее выборочная оценка | 462 |
| 13.7. Определение доверительных интервалов для коэффициентов и функции регрессии | 464 |

| | |
|---|------------|
| 13.8. Оценка взаимосвязи переменных. Проверка значимости уравнения множественной регрессии | 468 |
| 13.9. Мультиколлинеарность | 472 |
| 13.10. Понятие о других методах многомерного статистического анализа | 474 |
| Упражнения | 476 |
| Глава 14. Введение в анализ временных рядов | 479 |
| 14.1. Общие сведения о временных рядах и задачах их анализа | 479 |
| 14.2. Стационарные временные ряды и их характеристики. Автокорреляционная функция | 481 |
| 14.3. Аналитическое выравнивание (сглаживание) временного ряда (выделение неслучайной компоненты) | 484 |
| 14.4. Временные ряды и прогнозирование. Автокорреляция возмущений | 488 |
| 14.5. Авторегрессионная модель | 494 |
| Упражнения | 495 |
| Глава 15. Линейные регрессионные модели финансового рынка | 497 |
| 15.1. Регрессионные модели | 497 |
| 15.2. Рыночная модель | 499 |
| 15.3. Модели зависимости от касательного портфеля | 500 |
| 15.4. Неравновесные и равновесные модели | 503 |
| 15.5. Модель оценки финансовых активов (CAPM) | 505 |
| 15.6. Связь между ожидаемой доходностью и риском оптимального портфеля | 506 |
| 15.7. Многофакторные модели | 507 |
| 15.8. Многофакторная модель оценки финансовых активов | 509 |
| Библиографический список | 511 |
| Ответы к упражнениям | 513 |
| Приложения. Математико-статистические таблицы | 530 |
| Предметный указатель | 539 |