

УДК 517.9

В.М. ДЕУНДЯК, Е.А. СТЕПАНИЮЧЕНКО

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ ПОСЛОЙНО СИНГУЛЯРНОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p(\mathbb{R}^2)$

Введен новый класс двумерных интегральных операторов с однородными ядрами, включающий в себя известный класс операторов с $SO(2)$ -инвариантными ядрами. Для банаховой алгебры, порожденной парными операторами такого вида, на основе билакального метода построено символическое исчисление, с помощью которого получен критерий фредгольмовости.

Ключевые слова: интегральные операторы, однородные ядра, символическое исчисление, фредгольмовость.

Введение и постановка задачи. Пусть $1 < p, p' < \infty$ и $1/p + 1/p' = 1$. Исследованию разрешимости интегральных операторов с однородными ядрами в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ посвящено много работ [1-4]. Отметим, что если условия ограниченности получены для произвольных операторов такого типа [1-2], то при исследовании фредгольмовости и вычислении индекса на ядра, кроме условия суммируемости, накладывалось также, как правило, условие инвариантности относительно диагонального действия группы ортогональных преобразований $SO(n)$ [1, 3, 4].

В настоящей работе для $n=2$ строится новая банахова алгебра интегральных операторов с однородными ядрами, которая, с одной стороны, включает в себя класс операторов с $SO(2)$ -инвариантными ядрами, а с другой - пространственно подобна некоторой алгебре операторов билакального типа. Последнее обстоятельство используется для построения символического исчисления и исследования фредгольмовости. Часть представленных в настоящей работе результатов анонсирована в [5].

Операторы с однородными ядрами. Прежде всего введем некоторые обозначения. Если \mathbf{B} — банахово пространство, то $\text{End}(\mathbf{B})$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов в \mathbf{B} , $\text{Comp}(\mathbf{B})$ — идеал компактных операторов, $\text{Fr}(\mathbf{B})$ — пространство фредгольмовых операторов. Изоморфизм банаховых пространств $\alpha: \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2$ задает изоморфизм подобия банаховых алгебр $\hat{\alpha}: \text{End}(\mathbf{B}_1) \rightarrow \text{End}(\mathbf{B}_2)$ по правилу: $A \in \text{End}(\mathbf{B}_1) \mapsto \alpha A \alpha^{-1} \in \text{End}(\mathbf{B}_2)$. Если U произвольная банахова алгебра, то U^+ — унитализация U .

Для компакта X и нормированного пространства Y через $C(X, Y)$ будем обозначать пространство непрерывных отображений X в Y с равномерной топологией; пусть $P(X) = P(X, \mathbb{C})$. Для локально компактного некомпактного пространства X банахово пространство отображений из $C(X, Y)$, стремящихся к 0 на бесконечности, обозначим $C_0(X, Y)$; пусть $P_0(X) = P_0(X, \mathbb{C})$.