МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ГЛАЗОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. КОРОЛЕНКО»

КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ: ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЧАСТЬ 1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Для студентов направления «Педагогическое образования»
естественно-научных профилей

Глазов 2015

Утверждено на заседании
кафедры математики, теории и
методики обучения математике
Протокол № __ от _________

Краткий курс лекций по математическому анализу: теоретические основы и примеры решении задач: учебно-методическое пособие для студентов направления «Педагогическое образования» естественно-научных профилей. *Часть 1. Введение в анализ*. – Глазов: Глазов. гос. пед. ин-т. 2015. – 56 с.

Составитель: *Н.В. Леонтьева*, канд. пед. наук, старший преподаватель кафедры математики, теории и методики обучения математике ГГПИ им. В.Г. Короленко.
Рецензент: Закирова Н. М., канд. технических наук, доцент

Методическое пособие «Краткий курс лекций по математическому анализу» предназначено для студентов направления «Педагогическое образование» естественно-научных профилей, содержит краткие теоретические сведения по ведущим разделам учебного курса «Математический анализ» и примеры решения основных задач. Пособие может быть использовано для подготовки к лекционным, семинарским занятиям, экзаменам и для самостоятельной работы студентов. Первая часть пособия посвящена определению функции – основного понятия математического анализа. Также рассматриваются вопросы, связанные с введением понятия предела.

Часть 1. Введение в анализ

Глава 1. Множество действительных чисел

Числовая ось

Основным понятием курса математического анализа является понятие действительного числа. Построение множества действительных чисел начинается с натуральных чисел.

Числа вида 1, 2, 3, … называют натуральными числами. Множество натуральных чисел обозначается $\mathbb{N}$.

Присоединение к натуральным числам нуля и чисел противоположных по знаку натуральным дает множество целых чисел. Обозначают множество целых чисел $\mathbb{Z}$.

Числа, которые можно представить в виде дроби $\dfrac{p}{q}$, где p и q – целые числа ($q \neq 0$), называют рациональными. Множество рациональных чисел обозначается $\mathbb{Q}$.

Можно показать, что существуют числа, не являющиеся рациональными. Такие числа называют иррациональными.

Присоединение множества иррациональных чисел к множеству рациональных чисел образует множество вещественных или действительных чисел, обозначаемое $\mathbb{R}$.

Замечание. Множество действительных чисел замкнуто относительно четырех арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления).

Для множества действительных чисел существует наглядная геометрическая интерпретация – числовая прямая или числовая ось.

Определение 1. Числовой осью называют прямую, на которой выбраны начало отсчета точка O, единичный отрезок OE и положительное направление (рис. 1).

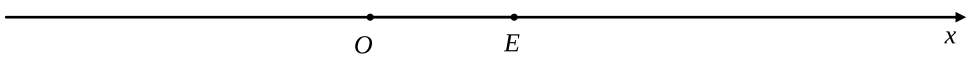

Рис 1. Числовая прямая

В большинстве случаев понятия числа и точки числовой оси не различают. Обозначают числовую прямую также $\mathbb{R}$.

Иногда рассматривают не всю числовую ось, а только ее часть, которую обычно называют числовым промежутком и обозначают $\langle a; b\rangle$. Существуют следующие обозначения и названия для отдельных видов промежутков:

- $(a; b)$ – интервал;
- $[a; b]$ – отрезок;
- $(a; b]$ – полуинтервал, содержащий конец b;

– $[a;b)$ – полуинтервал, содержащий конец a.

Величину $b-a\,(b \ge a)$ называют длиной промежутка $\langle a;b\rangle$. Если один из концов равен $\pm\infty$, то получаем неограниченный промежуток или луч.

Кванторы существования и общности

Для более компактной записи математических выражений используют два основных два основных вида кванторов:

– квантор существования, заменяющий выражение «существует» (обозначается $\exists$);

– квантор общности, заменяющий «для всех» (обозначается $\forall$).

Модуль действительного числа

<u>**Определение 2**</u>. Модулем действительного числа a называют само число a, если $a \ge 0$, или число $-a$, если $a < 0$. Иначе $|a| = \begin{cases} a, \; a \ge 0 \\ -a, \; a < 0 \end{cases}$.

Основные свойства модуля:

1. $|a| \ge 0$;
2. $|a| = |-a|$;
3. $-|a| \le a \le |a|$;
4. $|a| \le c \Leftrightarrow -c \le a \le c$, $(c \ge 0)$;
5. $|a| > c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > c \\ a < -c \end{array}\right.$, $(c \ge 0)$;
6. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
7. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $(b \ne 0)$;
8. $|a+b| \le |a| + |b|$ (неравенство треугольника);
9. $|a-b| \le |a| + |b|$;
10. $\big||a| - |b|\big| \le |a-b|$.

Грани числовых множеств

Рассмотрим непустое множество действительных чисел $\{x\}$, в общем случае бесконечное.

<u>**Определение 3**</u>. Множество $\{x\}$ называется ограниченным снизу, если $\exists m \forall x \in \{x\} : x \ge m$.

Число m называют нижней границей множества $\{x\}$. Если множество имеет нижнюю границу, то оно имеет бесконечно много нижних границ.