

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОУ ВПО «ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Теория вероятностей и математическая статистика

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:
Л.Н. Баркова

Воронеж

2009

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Элементы комбинаторики

Комбинаторика – это область математики, в которой изучаются вопросы подсчета различных комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, которые можно составить из заданных объектов.

Определение 1.1. Множество (совокупность элементов) называется занумерованным, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие натуральное число (номер) от 1 до n .

Если n конечно, то множество конечное и состоит из n элементов. Если $n = \infty$, то множество называется счетным.

Конечное или счетное множество называется *упорядоченным*, если каждому его элементу сопоставлен порядковый номер, то есть номер места, на котором этот элемент расположен.

Определение 1.2. Отличающиеся друг от друга наборы (упорядоченные множества), составленные из всех элементов данного конечного множества, называются *перестановками*. Число всех перестановок множества из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле

$$P_n = n!$$

При этом $P_1 = 1$ и $P_0 = 1$.

Пример 1.1. Множество, стоящее из трех элементов $\{1, 2, 3\}$, имеет следующие перестановки:

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$$

Их число $P_3 = 3! = 6$.

Пример 1.2. Сколькими различными маршрутами можно разнести корреспонденцию по пяти адресам?

Решение. Занумеруем адреса цифрами от 1 до 5. Каждому маршруту можно сопоставить один из наборов, состоящих из этих 5 цифр, например, $(2, 5, 3, 1, 4)$. Этот набор означает, что сначала выбирается второй адрес, затем пятый, третий, первый и четвертый. Всего различных маршрутов будет $P_5 = 5! = 120$.

Определение 1.3. Упорядоченные наборы, состоящие из k различных элементов, выбранных из данных n элементов по k , называются *размещениями*.

6. Сколько различных подмножеств, включая само множество и пустое, можно выделить из множества, содержащего n элементов.

7. В розыгрыше лотереи участвуют 3 человека. Каждому из них присвоен порядковый номер. Участники лотереи должны вытащить одну карточку со своим порядковым номером. Каково число вариантов, в которых выигрыш только у одного участника лотереи? В которых ни один не выигрывает?

8. Сколько пятибуквенных слов (перестановок), каждое из которых состоит из трех согласных и двух гласных, можно образовать из букв слова **УРАВНЕНИЕ**.

2. Случайные события.

Определение 2.1. Некоторый опыт называется случайным, если он может закончиться любым возможным исходом, но до проведения опыта нельзя предсказать, каким именно.

Множество всех взаимно исключающих исходов образует пространство элементарных исходов Ω . Исходы опыта (элементы Ω) будем обозначать ω .

Определение 2.2. Произвольное подмножество из множества Ω называется событием.

События обычно обозначаются буквами A, B, C, \dots . Говорят, что событие произошло, если опыт окончится одним из исходов, входящих в это событие.

Пример 2.1. Пусть опыт состоит в бросании «честной» игральной кости. В этом случае Ω состоит из 6 исходов, каждым из которых является число очков, выпавших на верхней грани, т.е. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Событие $A = \{3, 6\}$ обозначает выпадение числа очков, кратного 3 и т.д.

Множество Ω может иметь и несчетное число элементов, например, имеется проволока длиной 1 метр. Растягивание проволоки происходит до тех пор, пока она не порвется в какой-либо точке. В этом случае множество исходов – любая точка проволоки и поэтому $\Omega = [0, 1]$.

Определение 2.3. Суммой $A \cup B$ (объединением) двух событий A и B называется событие, состоящее из всех исходов, входящих либо в A , либо в B (происходит хотя бы одно из данных событий).

Определение 2.4. Произведением $A \cap B$ (пересечением) двух событий A и B называется событие, состоящее из всех исходов, входящих одновременно и в A , и в B (происходят оба события одновременно).

Определение 2.5. Разностью $A \setminus B$ двух событий A и B называется событие, состоящее из тех исходов события A , которые не входят в событие B (происходит только A и не происходит B).

Определение 2.6. Симметрической разностью $A \Delta B$ двух событий A и B называется событие, состоящее из исходов, входящих в A или в B , но не входящих в пересечение A и B .

Определение 2.7. Противоположным \bar{A} (дополнительным) для события A называется событие, состоящее из всех исходов, не входящих в событие A (происходит только одно из событий A или \bar{A}).

Определение 2.8. Событие Ω , состоящее из всех исходов случайного опыта, называется достоверным (оно обязательно происходит в данном опыте).

Событие \emptyset , не содержащее ни одного исхода данного опыта, называется невозможным (оно в данном опыте никогда не происходит).

Определение 2.9. События A и B называются несовместными, если они в данном опыте не могут произойти одновременно (то есть их пересечение есть событие невозможное).

Определение 2.10. Событие A содержится в событии B $A \subset B$ (событие A влечет событие B), если все исходы события A входят в событие B .

Свойства операций над событиями:

1) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;

2) $A \cup \bar{A} = \Omega$; $A \cap \bar{A} = \emptyset$;

3) $A \cup \Omega = \Omega$; $A \cap \Omega = A$;

4) $A \cap B \subset A$; $A \setminus B = A \cap \bar{B}$;

5) $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$;

6) $\overline{\bar{A}} = A$;

7) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

8) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

$$9) \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i} ; \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i} ;$$

$$10) (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Из партии, в которой 22 изделия хороших, а 3 бракованных, наудачу выбирают 4 изделия. Событие A - хотя бы одно из выбранных четырех изделий бракованное. Событие B - среди выбранных четырех изделий не менее двух. Что означают события \overline{A} , \overline{B} , $\overline{A} \cap \overline{B}$, $A \cap B$?

2. Пусть A, B, C - произвольные события некоторого случайного опыта. Записать через A, B, C следующие события: а) произошло только событие A ; б) произошло одно и только одно из событий; в) произошло по крайней мере одно событие; г) произошло не более двух событий; д) произошли ровно два события; е) произошли все три события.

3. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно трехзначное число. Событие A - выбранное число делится на 5, событие B - данное число оканчивается нулем. Что означают события $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap B$?

4. Бросают две игральные кости. Пусть событие A состоит в том, что сумма очков равна пяти, B - хотя бы на одной кости выпала единица. Описать события $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$.

3. Классическое и геометрическое определение вероятности

Вероятность события характеризует возможность (шанс) осуществления события в результате некоторого случайного опыта. Если случайный опыт можно повторить сколь угодно много раз в одних и тех же условиях, то частота некоторого конкретного события будет стремиться к некоторому постоянному числу. Это число и принимается за вероятность данного события.

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ - конечно и каждому исходу ω_i поставлено в соответствие неотрицательное число $p(\omega_i)$ так, что выполнено условие

$$\sum_{i=1}^n p(\omega_i) = 1.$$