МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
“ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”

# Преобразование дифференциальных выражений с частными производными

Учебно-методическое пособие

Составители:
В. Е. Чернов,
С. А. Переселков,
М. Г. Холявка

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2015

# 1 Вводные замечания

Частные производные возникают при описании многих физических, химических и биологических процессов, поэтому работа с ними — следующий (после обычного дифференцирования) важный шаг в изучении высшей математики на естественных факультетах. Для функций нескольких переменных сложнее выглядят, например, правила дифференцирования сложной функции, правила нахождения производных обратного отображения и т.д. Опыт показывает, что операции с частными производными, особенно высших порядков, обычно вызывают у студентов трудности, связанные с недостатком времени, уделяемого этой тематике в рамках аудиторных практических занятий.

С другой стороны, сложившаяся практика зачастую сводится к формальным расчётам некоторых производных без какой-либо связи с материалом последующих курсов, таких как вариационное исчисление и уравнения математической физики, в которых изучаются уравнения в частных производных. В этих курсах уже предполагается, что студент должен уметь достаточно быстро, например, убеждаться в том, что данная функция нескольких переменных является решением данного уравнения в частных производных или что это уравнение с помощью данной замены переменных приводится к данному виду (или, в частности, остаётся инвариантным по отношению к такой замене). В результате при изучении этих дисциплин внимание студентов распыляется на технические подробности, что препятствует общему усвоению курса математической физики и его приложений к задачам естественных наук.

Представляется оправданным перенести овладение этими подробностями на первый курс, когда студенты только начинают знакомство с частными производными. Подстановка функций нескольких переменных в дифференциальные выражения с частными производными, с одной стороны, даёт навыки, необходимые на последующих курсах, а с другой стороны — делает выполнение рутинных вычислений более мотивированным, т.к. цель таких вычислений становится более где $A$, $a$, $b$, $m > 0$, $n > 0$ — произвольные константы, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = ax^4 t^n \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^m w. \tag{2.1.2}$$

**Решение.** В выражении (2.1.1) зависимость от $x$ присутствует только в предэкспоненциальном множителе, поэтому его дифференцирование по $x$ элементарно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= A\left(\frac{2a}{n+1}t^{n+1} - \frac{1}{x^2}\right)\exp\left(\frac{b}{m+1}t^{m+1}\right), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{A}{x^3}\exp\left(\frac{b}{m+1}t^{m+1}\right). \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Тогда правая часть (2.1.2) принимает вид

$$A\left(2aAxt^n + \frac{2aAbx}{n+1}t^m t^{n+1} + \frac{bt^m}{x}\right)\exp\left(\frac{b}{m+1}t^{m+1}\right). \tag{2.1.4}$$

Вычислим теперь производную по $t$, т.е. левую часть (2.1.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = A(2axt^n)\exp\left(\frac{b}{m+1}t^{m+1}\right) + \\ + A\left(\frac{2ax}{n+1}t^{n+1} + \frac{1}{x}\right)bt^m\exp\left(\frac{b}{m+1}t^{m+1}\right). \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Раскрыв скобки в выражении (2.1.5), легко видеть, что оно совпадает с (2.1.4).

## 2.2 Подстановка функции трёх переменных в уравнение с высшими производными

Убедимся, что функция

$$w(x, y, t) = \mathrm{e}^{-\lambda y}\left[A(t)\mathrm{e}^{\beta x} + B(t)\mathrm{e}^{-\beta x}\right] +$$

$$+ x\phi(t) + y\psi(t) + \chi(t), \tag{2.2.1a}$$

$$A(t) = C_1 \exp\left[\nu(\lambda^2 + \beta^2)t - \beta \int \psi(t)\,\mathrm{d}t - \right.$$

$$\left. - \lambda \int \phi(t)\,\mathrm{d}t\right] \tag{2.2.1b}$$

$$B(t) = C_2 \exp\left[\nu(\lambda^2 + \beta^2)t + \beta \int \psi(t)\,\mathrm{d}t - \right.$$

$$\left. - \lambda \int \phi(t)\,\mathrm{d}t\right], \tag{2.2.1c}$$

где $C_1$, $C_2$, $\lambda > 0$, $\beta > 0$ — произвольные константы, а $\phi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$ — произвольные функции, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta w) + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w) = \nu\Delta\Delta w. \tag{2.2.2}$$

**Решение.** Нестационарное уравнение Навье–Стокса (2.2.2) описывает двумерное нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости. Оно является уравнением 4-го порядка, поскольку содержит двукратное применение оператора Лапласа $\Delta$.

При подстановке функции (2.2.1) в уравнение (2.2.2) будем пользоваться формулой (2.3.5). Из (2.2.1a) имеем

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \beta \mathrm{e}^{-\lambda y}\left[A(t)\mathrm{e}^{\beta x} - B(t)\mathrm{e}^{-\beta x}\right] + \phi(t), \tag{2.2.3a}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}\left[A(t)\mathrm{e}^{\beta x} + B(t)\mathrm{e}^{-\beta x}\right] + \psi(t) \tag{2.2.3b}$$

и аналогично вторые производные по пространственным переменным:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \beta^2 \mathrm{e}^{-\lambda y}\left[A(t)\mathrm{e}^{\beta x} + B(t)\mathrm{e}^{-\beta x}\right] \tag{2.2.4a}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda y}\left[A(t)\mathrm{e}^{\beta x} + B(t)\mathrm{e}^{-\beta x}\right], \tag{2.2.4b}$$

откуда получаем результат действия на $w(x, y, t)$ оператора Лапласа:

$$\Delta w = (\lambda^2 + \beta^2)\mathrm{e}^{-\lambda y} \left[A(t)\mathrm{e}^{\beta x} + B(t)\mathrm{e}^{-\beta x}\right]. \tag{2.2.5}$$

Теперь с помощью (2.2.5) вычислим производные от $\Delta w$

$$\frac{\partial(\Delta w)}{\partial x} = \beta(\lambda^2 + \beta^2)\mathrm{e}^{-\lambda y} \left[A(t)\mathrm{e}^{\beta x} - B(t)\mathrm{e}^{-\beta x}\right] \tag{2.2.6a}$$

$$\frac{\partial(\Delta w)}{\partial y} = -\lambda(\lambda^2 + \beta^2)\mathrm{e}^{-\lambda y} \left[A(t)\mathrm{e}^{\beta x} + B(t)\mathrm{e}^{-\beta x}\right], \tag{2.2.6b}$$

а с помощью (2.2.6) — входящие в (2.2.2) выражения

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial(\Delta w)}{\partial x} &= -\lambda\beta(\lambda^2 + \beta^2)\mathrm{e}^{-2\lambda y}\left[A^2(t)\mathrm{e}^{2\beta x} - B^2(t)\mathrm{e}^{-2\beta x}\right] + \\ &\quad + \beta\phi(t)(\lambda^2 + \beta^2)\mathrm{e}^{-\lambda y}\left[A(t)\mathrm{e}^{\beta x} - B(t)\mathrm{e}^{-\beta x}\right], \end{aligned} \tag{2.2.7a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial(\Delta w)}{\partial y} &= -\lambda\beta(\lambda^2 + \beta^2)\mathrm{e}^{-2\lambda y}\left[A^2(t)\mathrm{e}^{2\beta x} - B^2(t)\mathrm{e}^{-2\beta x}\right] - \\ &\quad - \lambda\psi(t)(\lambda^2 + \beta^2)\mathrm{e}^{-\lambda y}\left[A(t)\mathrm{e}^{\beta x} + B(t)\mathrm{e}^{-\beta x}\right]. \end{aligned} \tag{2.2.7b}$$

В (2.2.2) входит разность выражений (2.2.7a) и (2.2.7b); при её вычислении первые слагаемые в квадратных скобках в (2.2.7a) и (2.2.7b) сокращаются, после чего получаем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial(\Delta w)}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial(\Delta w)}{\partial y} = \\ &\quad = A(t)(\lambda^2 + \beta^2)\mathrm{e}^{\beta x - \lambda y}[\beta\phi(t) + \lambda\psi(t)] - \\ &\quad -B(t)(\lambda^2 + \beta^2)\mathrm{e}^{-\beta x - \lambda y}[\beta\phi(t) - \lambda\psi(t)]. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Теперь займемся дифференцированием по времени $t$. Пользуясь формулой (2.3.5) и учитывая, что производные по времени от неопределенных интегралов в показателях экспонент в (2.2.1b) и (2.2.1c) равны соответствующим подынтегральным выражениям, имеем

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} = A(t)\left[\nu(\lambda^2 + \beta^2) - \beta\psi(t) - \lambda\phi(t)\right], \tag{2.2.9a}$$



ŋqdqɣɘɤ bƐ dɘqƐbɤɜɘ d ɛɔɑbɔɤ ɟqdqɤqɣè