

УДК 517
ББК 22.161.616
М 266

Интернет-магазин
MATHESIS

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- нефтегазовые технологии



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №09-01-07043.

Маркеев А. П.

Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. — 396 с.

В книге дано изложение современных методов исследования устойчивости материальных систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями Гамильтона с периодическими коэффициентами. Основное внимание уделено конструктивным, рассчитанным на применение компьютеров, алгоритмам построения областей параметрического резонанса.

Описываются результаты применения упомянутых методов и алгоритмов в целом ряде задач об устойчивости движения спутника — твердого тела относительно центра масс на круговой и эллиптической орбитах. Значительная часть содержащегося в книге материала представляет собой результаты собственных исследований автора, некоторые из них еще не публиковались.

Книга предназначена для инженеров, научных работников в области прикладной математики и механики, для студентов старших курсов и аспирантов.

ISBN 978-5-93972-729-7

ББК 22.161.616

© А. П. Маркеев, 2009

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

Оглавление

Предисловие	9
ЧАСТЬ I. ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	11
ГЛАВА 1. Линейные системы с постоянными коэффициентами .	13
§ 1. Устойчивость линейных гамильтоновых систем с постоянными коэффициентами	13
§ 2. Нормальная форма линейной автономной гамильтоновой системы в случае простых чисто мнимых корней характеристического уравнения	15
§ 3. Нормализация системы с двумя степенями свободы в случае двух чисто мнимых и двух нулевых корней с непростыми элементарными делителями	20
1. О характеристическом уравнении	21
2. Нормальная форма и нормализующее преобразование	22
§ 4. О нормализации системы с двумя степенями свободы в случае кратных чисто мнимых корней	24
ГЛАВА 2. Линейные системы с периодическими коэффициентами	26
§ 1. Общие сведения	26
§ 2. Устойчивость линейных гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами	29
§ 3. Нормализация гамильтоновой системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами	31
§ 4. Система с одной степенью свободы	33
1. Характеристическое уравнение и условия устойчивости . .	33
2. Построение нормализующего преобразования	36
§ 5. О характеристическом уравнении системы с двумя степенями свободы	38

ГЛАВА 3. Задача о параметрическом резонансе	41
§ 1. Линейные гамильтоновы системы, содержащие малый параметр	41
§ 2. Параметрический резонанс в системе с одной степенью свободы	45
§ 3. О комбинационном резонансе в системе с двумя степенями свободы	51
1. Случай, когда частоты колебаний системы при $\varepsilon = 0$ различны	51
2. Один частный случай равных частот колебаний	54
ГЛАВА 4. Конструктивные алгоритмы анализа линейных систем, содержащих малый параметр	60
§ 1. О методе Депри–Хори в теории возмущений гамильтоновых систем	60
§ 2. Нерезонансный случай. Нахождение характеристических показателей	64
§ 3. Резонансные случаи. Построение границ областей устойчивости и неустойчивости методом Депри–Хори	67
1. Система с одной степенью свободы	67
2. Система с двумя степенями свободы	71
§ 4. Кратный резонанс	82
1. Об алгоритме исследования	82
2. Резонанс $\omega_1 = \omega_2 = 0$	84
3. Резонанс $2\omega_1 = n_1, \omega_2 = 0$	89
4. Резонанс $2\omega_1 = 2\omega_2 = n$	91
5. Резонанс $2\omega_1 = n_1, 2\omega_2 = n_2$ ($n_1 \neq 0, n_2 \neq 0$)	92
ГЛАВА 5. Уравнение Матье	93
§ 1. Области устойчивости и неустойчивости	93
§ 2. Нормализация гамильтониана уравнения Матье	97

ЧАСТЬ II. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС 101

ГЛАВА 6. Спутник с трехосным эллипсоидом инерции: относительное равновесие, колебания на эллиптической орбите	103
§ 1. Системы координат. Функция Гамильтона	103
§ 2. Равновесие на круговой орбите	107
§ 3. Эксцентриситетные колебания	111
1. Нерезонансные 2π -периодические колебания ($\mu \neq 1$)	112

2. Резонансные 2π -периодические колебания ($\mu \approx 1$)	117
3. Продолжение решений по параметрам μ и e	124
§ 4. Об устойчивости эксцентриситетных колебаний при наличии пространственных возмущений	128
1. Нормализация функции Гамильтона (4.2) при $e = 0$	130
2. Порождающие кривые для областей параметрического резонанса	136
3. Некоторые частные случаи параметрического резонанса	138
4. Предельный случай $\theta_A = 0$	150
§ 5. О точных решениях уравнения (3.3)	152
§ 6. Периодические колебания спутника относительно направления, неподвижного в абсолютном пространстве	156
1. Случай малого эксцентриситета	158
2. Случай почти симметричного спутника	161
3. Произвольные значения параметров	163
ГЛАВА 7. Динамически симметричный спутник: регулярные прецессии и близкие к ним движения на орбите малого эксцентриситета	166
§ 1. Уравнения движения	166
§ 2. Стационарные вращения (регулярные прецессии) спутника на круговой орбите	168
1. Существование стационарных решений. Три типа регулярных прецессий	168
2. Об устойчивости регулярных прецессий	171
§ 3. Цилиндрическая прецессия на орбите малого эксцентриситета	177
1. Нормализация функции Гамильтона (3.2) при $e = 0$	179
2. Резонансные кривые	184
3. Области параметрического резонанса в первом приближении по e	186
4. О кратном параметрическом резонансе	190
§ 4. Периодические движения, рождающиеся из гиперболоидальной прецессии	202
1. Представление решений в виде рядов	203
2. Параметрический резонанс при малых значениях эксцентриситета	204
§ 5. О периодических движениях, рождающихся из конической прецессии	211

ГЛАВА 8. Об устойчивости цилиндрической прецессии динамически симметричного спутника на орбите произвольного эксцентриситета	215
§ 1. Поступательное движение	215
1. Об устойчивости при малых значениях эксцентриситета	215
2. Случай значений α , близких к единице	217
3. Результаты численного анализа при произвольных значениях параметров	218
§ 2. Случай пластинки	219
1. Области параметрического резонанса при малых e	220
2. Области устойчивости и неустойчивости при произвольных e	221
§ 3. Случай почти сферического спутника	223
1. Функция Гамильтона	224
2. О невозмущенной системе ($\varepsilon = 0$)	224
3. Об алгоритме анализа возмущенной системы	226
4. Некратный резонанс	227
5. Кратный резонанс	228
§ 4. Стационарное вращение лунного типа ($\beta = 1$)	234
§ 5. Стационарное вращение меркурианского типа ($\beta = 3/2$)	238
 ГЛАВА 9. Устойчивость плоских колебаний и вращений спутника на круговой орбите	 242
§ 1. Колебания несимметричного спутника в окрестности его устойчивого равновесия в орбитальной системе координат	242
1. Об устойчивости колебаний малой амплитуды	244
2. Об устойчивости плоских колебаний пластинки	248
3. Колебания с периодом, равным периоду обращения центра масс по орбите	252
§ 2. Колебания относительно направления, фиксированного в абсолютном пространстве	257
§ 3. Некоторые задачи об устойчивости вращения несимметричного спутника	260
1. Быстрые вращения	260
2. Вращение спутника, близкого к динамически симметричному	267
3. Вращения пластинки	274
4. Плоские вращения меркурианского типа	283
§ 4. Плоские колебания и вращения динамически симметричного спутника на круговой орбите	288

1. Устойчивость плоских колебаний	290
2. Устойчивость плоских вращений	293
Дополнение. К теории резонансного вращения Меркурия	298
§ 1. Орбита малого эксцентриситета	299
1. Предварительное преобразование функции Гамильтона	300
2. Существование и устойчивость периодических вращений	301
3. Явные выражения для периодических решений в первом приближении по e	304
4. О ветвлении обратных вращений	307
§ 2. Спутник, близкий к динамически симметричному	316
1. Функция Гамильтона	316
2. Существование и устойчивость периодических вращений	317
3. Приближённое выражение для периодических вращений	319
4. О периодических вращениях спутника для значений e , близких к e_m^*	320
5. Об устойчивости вращений меркурианского типа по отношению к пространственным возмущениям	328
§ 3. Случай $e = 0,2056$	334
1. Существование 2π -периодических движений	334
2. Устойчивость периодических движений по отношению к плоским возмущениям	336
3. Об устойчивости по отношению к пространственным возмущениям	340
Приложение 1. Эллиптические функции и интегралы	347
§ 1. Эллиптические интегралы	347
1. Эллиптические интегралы первого и второго рода	347
2. О параметре q	350
§ 2. Эллиптические функции Якоби	352
1. Эллиптические функции Якоби и их свойства	352
2. Дзета-функция Якоби $\text{zn } u$	356
3. Разложение эллиптических функций Якоби и функций $\text{am } u$, $\text{zn } u$ в тригонометрические ряды	356
4. Правила дифференцирования функций $\text{sn}(u, k)$, $\text{cn}(u, k)$, $\text{dn}(u, k)$, $\text{zn}(u, k)$ по модулю k	359
Приложение 2. Переменные действие-угол в задаче о движении маятника	362
§ 1. Фазовый портрет	362
§ 2. Переменные действие-угол	363

Приложение 3. Некоторые ряды из теории кеплеровского движе-	
ния	365
§ 1. О трёх аномалиях	365
§ 2. Разложения в ряды	366
Приложение 4. Из теории нелинейных гамильтоновых систем .	369
§ 1. О периодических решениях Пуанкаре	369
§ 2. К задаче об устойчивости положения равновесия	371
1. Получение отображения	372
2. Условия устойчивости и неустойчивости	373
Приложение 5. О функциях $\Phi_m(e)$	378
§ 1. Аналитическое представление при помощи функций Бесселя .	378
§ 2. Разложение в ряды по степеням e	380
§ 3. Свойства функций $\Phi_m(e)$ и их графики	381
Литература	384