УДК 517.95

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТОРМОЖЕНИЕМ МГД-ТЕЧЕНИЯ

А. Ю. Чеботарев

Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041 Владивосток
E-mail: cheb@iam.dvo.ru

Рассмотрена задача импульсного управления для трехмерной модели магнитной гидродинамики. Показано, что сингулярности решения уравнений магнитной гидродинамики с течением времени не развиваются из-за подавления их магнитным полем. Доказано существование оптимального управления, построена система оптимальности, решение которой регулярно в целом по времени.

Ключевые слова: уравнения магнитной гидродинамики, импульсное управление, условия оптимальности.

Введение. Течение однородной вязкой несжимаемой и проводящей жидкости в ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ со связной границей $\Gamma = \partial\Omega$ моделируется уравнениями магнитной гидродинамики (МГД) в безразмерных переменных:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \nu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + S\cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{q}, \qquad x\in\Omega, \quad t\in(0,T); \tag{2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\nu_m}\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}). \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ — векторные поля скорости, магнитной индукции и электрической напряженности соответственно; p — давление; $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(x)$ — плотность внешних сил; $\nu = 1/\operatorname{Re}$; $\nu_m = 1/\operatorname{Re}_m$; $S = M^2/(\operatorname{Re}\operatorname{Re}_m)$; Re — число Рейнольдса; Re_m — магнитное число Рейнольдса; M — число Гартмана.

К уравнениям (1)–(3) добавляются условия на границе Γ области течения

$$\boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E} = 0, \qquad (x,t)\in\Gamma\times(0,T) \tag{4}$$

($\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе Γ) и начальные условия

$$\boldsymbol{u}\big|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0(x), \quad \boldsymbol{B}\big|_{t=0} = 0, \qquad x\in\Omega. \tag{5}$$

Предлагается способ торможения течения с помощью импульсного управления магнитным полем. В качестве управляющих функций выбираются скачки $\boldsymbol{b}_i$ магнитного поля в моменты времени $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < T$. В этом случае МГД-течение описывается уравнениями (1), (3) и уравнениями

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{m}\delta(t-t_i)\boldsymbol{b}_i, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\nu_m}\,(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и ДВО РАН (код проекта 06-01-96003), Фонда содействия отечественной науке и в рамках программы “Ведущие научные школы РФ” (грант № НШ-9004.2006.1).

с начально-краевыми условиями (4), (5). Здесь $\delta(t-t_i)$ — δ-функция Дирака с носителем в точке t_i.

Задача состоит в минимизации функционала

$$J = \frac{1}{4}\int\limits_0^T \int\limits_\Omega ((\operatorname{rot}\boldsymbol{u})^2 + (\operatorname{rot}\boldsymbol{B})^2)^2\,dx\,dt + \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^m \int\limits_\Omega (\operatorname{rot}\boldsymbol{b}_i)^2\,dx$$

($\lambda > 0$ — параметр регуляризации).

Классические краевые задачи для эволюционной модели (1)–(3) изучены в [1, 2]. Задачи оптимального управления эволюционными системами Навье — Стокса впервые исследованы в [3–5]. Оптимальное управление нестационарными уравнениями магнитной гидродинамики рассмотрено в [6]. При исследовании задач оптимального управления трехмерными системами уравнений типа Навье — Стокса основной проблемой является регулярность оптимального состояния течения. Для данной постановки показано, что с течением времени сингулярности решения (в смысле Лере) не развиваются из-за подавления их магнитным полем. Доказана разрешимость задачи управления. Построена система оптимальности, регулярность которой обоснована в целом по времени. Метод вывода условий оптимальности близок к методу, предложенному в [7].

1. Формализация и разрешимость задачи управления. Для упрощения преобразований выполним перенормировку

$$\boldsymbol{B} = \sqrt{S}\,\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{E} = \sqrt{S}\,\boldsymbol{E}.$$

Тогда система (1)–(3) принимает вид

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0;$$

$$\boldsymbol{u}' - \nu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + \operatorname{rot}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{q}, \qquad x\in\Omega, \quad t\in(0,T);$$

$$\boldsymbol{B}' + \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0, \qquad \boldsymbol{E} = \nu_m \operatorname{rot}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B},$$

где $\boldsymbol{u}' = \partial\boldsymbol{u}/\partial t$; $\boldsymbol{B}' = \partial\boldsymbol{B}/\partial t$.

Рассмотрим вектор-функции и операторы, необходимые для анализа задачи управления пространством [2]. Пусть Ω — односвязная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ со связной границей $\Gamma\in C^2$. Введем пространства

$$U_1 = \{\boldsymbol{v}\in C^\infty(\bar\Omega)\colon \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0,\ x\in\Omega, \quad \boldsymbol{v} = 0,\ x\in\Gamma\},$$

$$U_2 = \{\boldsymbol{v}\in C^\infty(\bar\Omega)\colon \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0,\ x\in\Omega, \quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v} = 0,\ x\in\Gamma\},$$

V_1 — замыкание U_1 по норме $W_2^1(\Omega)$, V_2 — замыкание U_2 по норме $W_2^1(\Omega)$, H_1 — замыкание U_1 по норме $L^2(\Omega)$, H_2 — замыкание U_2 по норме $L^2(\Omega)$.

Будем полагать, что

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_0 = \int\limits_\Omega (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\,dx\ —$$

скалярное произведение в пространствах H_1 и H_2,

$$((\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})) = (\operatorname{rot}\boldsymbol{u},\operatorname{rot}\boldsymbol{v})_0 = \int\limits_\Omega (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{v})\,dx \qquad \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V_1, V_2\ —$$

скалярное произведение в пространствах V_1 и V_2, при этом определяемая им норма эквивалентна норме пространства $W_2^1(\Omega)$. Пусть X — банахово пространство. Тогда через