

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

И.В. Копытин, А.С. Корнев

# ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРУ УГЛОВЫХ МОМЕНТОВ

*Часть 1*

*Учебное пособие для вузов*

Воронеж  
Издательский дом ВГУ  
2015

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1. Основные понятия и соотношения</b>	<b>7</b>
1.1. Угловой момент . . . . .	7
1.1.1. Орбитальный момент . . . . .	7
1.1.2. Спин бозонов . . . . .	8
1.1.3. Спин фермионов . . . . .	9
1.1.4. Оператор углового момента . . . . .	9
1.1.5. Матрицы оператора углового момента . . . . .	14
1.2. Сложение двух угловых моментов . . . . .	16
1.2.1. Полный момент . . . . .	16
1.2.2. Волновые функции составной системы . . . . .	17
1.2.3. Свойства коэффициентов Клебша – Гордана . . . . .	19
1.2.4. Рекуррентные соотношения . . . . .	23
1.2.5. Учет фазовых множителей . . . . .	27
1.2.6. $3jm$ -символы и их свойства . . . . .	28
1.3. Матрица конечных вращений . . . . .	31
1.3.1. Генератор вращения . . . . .	31
1.3.2. Преобразование базисных функций . . . . .	32
1.3.3. Свойства матрицы конечных вращений . . . . .	34
1.4. Неприводимые тензорные операторы . . . . .	37
1.4.1. Циклический базис . . . . .	37
1.4.2. Определение Вигнера для сферического тензора . . . . .	40
1.4.3. Определение Рака для сферического тензора . . . . .	42
1.4.4. Произведения сферических тензоров . . . . .	43
1.4.5. Теорема Вигнера – Эккарта . . . . .	46
<b>Глава 2. <math>3j</math>-, <math>6j</math>- и <math>9j</math>-символы</b>	<b>54</b>
2.1. Схемы связи моментов. Формализм . . . . .	54
2.1.1. Связь двух моментов . . . . .	55
2.1.2. Связь трех моментов. $6j$ -символы . . . . .	56
2.1.3. Связь четырех моментов. $9j$ -символы . . . . .	59

При изложении материала настоящего пособия авторы придерживались стиля книги [2] и терминологии справочного руководства [3]. Задачи для самостоятельного решения собраны в пособии [4] из списка основной литературы.

Наиболее строгое изложение теории углового момента на основе групповых свойств вращений имеется в монографии [1] из списка дополнительной литературы. Оригинальное изложение рассмотренных вопросов имеется в монографии [2] и статье [3] из того же списка.

Поясним некоторые наиболее часто встречающиеся в данном пособии обозначения.

Оператор Гамильтона, или набла  $\nabla$ , определяется следующим образом:

$$\nabla_{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n},$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в заданном направлении; в этом же направлении вычисляется и производная. В декартовых координатах

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

С помощью оператора  $\nabla$  и операций векторной алгебры можно выразить основные операции векторного анализа:

- градиент:  $\text{grad} f(\mathbf{r}) \equiv \nabla f(\mathbf{r})$ ;
- дивергенция:  $\text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv (\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}))$ ;
- ротор:  $\text{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})]$ ;
- лапласиан:  $\nabla^2 f(\mathbf{r}) \equiv \text{div grad} f(\mathbf{r})$ ;  
 $\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_x \nabla^2 A_x(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_y \nabla^2 A_y(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_z \nabla^2 A_z(\mathbf{r})$ .

*Всюду используется атомная система единиц:  $\hbar = m = e = 1$ .*

(В единицах СИ

$\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}$  Дж · с;  $m = 9.11 \cdot 10^{-31}$  кг;  $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$  Кл).

## Глава 1.

# Основные понятия и соотношения

## 1.1. Угловой момент

### 1.1.1. Орбитальный момент

В курсе квантовой теории вводился оператор орбитального момента (или момента количества движения)  $\hat{\mathbf{L}} = [\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}]$ , где  $\hat{\mathbf{r}}$  и  $\hat{\mathbf{p}}$  — соответственно операторы координаты и импульса. Его основные свойства были получены с использованием координатного представления. Перечислим их:

- 1) в координатном представлении  $\hat{\mathbf{L}} = -i[\mathbf{r} \times \nabla]$ , т.е.  $\hat{\mathbf{L}}$  — аксиально-векторный эрмитов чисто мнимый оператор;
- 2) коммутационные соотношения для декартовых компонент:

$$[\hat{L}_k, \hat{L}_l] = i \sum_m \varepsilon_{klm} \hat{L}_m, \quad [\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_k] = 0; \quad k, l, m = x, y, z. \quad (1.1)$$

- 3) собственные значения:

$$\mathbf{L}_l^2 = l(l+1), \quad L_z = m; \quad l = 0, 1, \dots, \\ m = -l, -l+1, \dots, l; \quad (1.2)$$

- 4) собственные функции в сферической системе координат:

$$\langle \theta, \varphi | lm \rangle = Y_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\mathbf{n}) = \\ = e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta), \quad (1.3)$$

где  $P_l^m(x)$  — присоединенный полином Лежандра:

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (1-x^2)^l.$$

Индекс  $l$  принято называть *орбитальным*, а  $m$  — *магнитным* квантовыми числами. Функции  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  называются *сферическими функциями*. В некоторых источниках для них используется термин «сферическая гармоника».

В дальнейшем всюду, если это не оговорено особо, под  $\mathbf{n}$  будем подразумевать единичный вектор в направлении  $\mathbf{r}$ , под  $\mathbf{n}_A$  — единичный вектор в направлении вектора  $\mathbf{A}$ . В аргументе  $Y$ -функции  $\mathbf{n} \equiv (\theta, \varphi)$ .

### 1.1.2. Спин бозонов

Помимо орбитального момента (в центральном поле), микрочастицы могут нести еще и «внутренний» момент количества движения. Он называется спиновым моментом или просто *спином*. Экспериментально установлено, что проекция спина на выделенное направление может принимать либо только целые, либо только полуцелые значения.

Частицы с целым спином называются *бозонами*. Свойства их спина аналогичны (1.1) (по совместной измеримости) и (1.2) (по величине собственных значений). При этом, однако,  $l$  может принимать не любые значения, а лишь *одно конкретное целое  $s$* . Для собственных функций спиновых операторов  $\hat{\Sigma}$  формально допустимо координатное представление (1.3).

Тем не менее, в ряде случаев для спина удобным оказывается не координатное, а матричное  $\Sigma_z$ -представление. Для определенности рассмотрим оператор спина фотона ( $s = 1$ ). В  $\Sigma_z$ -представлении операторы его проекций имеют вид:

$$\hat{\Sigma}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\Sigma}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\Sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Рекомендуем самостоятельно проверить для них коммутационные соотношения (1.1)). Эти операторы действуют в пространстве *спиноров* — столбцов из 3 чисел. Аргумент таких функций дискретен. В качестве него может выступать номер элемента в спиноре либо однозначно соответствующее ему собственное значение  $\Sigma_z$ . Матричное представление иногда называется *спинорным представлением*. Приведем здесь собственные функции  $\hat{\Sigma}_z$  в спинорном представлении (индексы соответствуют собственным значениям  $\hat{\Sigma}_z$ ):

$$\chi_{+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \chi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \chi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$