

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

А.П. Трифонов, А.В. Захаров, В.К. Маршаков

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ЗАКОНОВ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ**

Учебно-методическое пособие для вузов

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2017

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1. Определение одномерных законов распределения.

Рассмотрим методы измерения одномерной функции распределения $F_1(x)$ и одномерной плотности вероятности $W_1(x)$ стационарного эргодического случайного процесса $\xi(t)$. Обозначим $P[A]$ - вероятность события A .

Одномерная функция распределения $F_1(x)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ определяется как функция (см. Приложение 2)

$$F_1(x) = P[\xi(t^*) < x] , \quad (1)$$

которая при фиксированном аргументе x равна вероятности того, что значение случайного процесса $\xi(t)$ в момент времени $t = t^*$ меньше уровня x .

Одномерная плотность вероятности $W_1(x)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ определяется как функция (см. Приложение 2)

$$W_1(x) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{P[x \leq \xi(t^*) < x + \delta x]}{\delta x} , \quad (2)$$

которая при фиксированном аргументе x равна нормированной на δx вероятности того, что значение случайного процесса $\xi(t)$ в момент времени $t = t^*$ находится в пределах интервала $[x; x + \delta x)$ при условии, что ширина интервала $\delta x \rightarrow 0$. Здесь интервал $[x; x + \delta x)$ при $d\delta \rightarrow 0$ называется *дифференциальным коридором*.

Замечание. В силу стационарности случайного процесса $\xi(t)$ его одномерная функция распределения $F_1(x)$ и одномерная плотность вероятности $W_1(x)$ не зависят от выбранного момента времени $t = t^*$, а сам момент времени $t = t^*$ может быть произвольным.

1.2. Метод измерения одномерной функции распределения.

1.2.1. Алгоритм измерения. Согласно (1), функция распределения $F_1(x)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ при фиксированном аргументе x определяется как вероятность события $\xi(t^*) < x$, состоящего в том, что значение случайного процесса $\xi(t)$ в фиксированный момент времени $t = t^*$ меньше уровня x .

Учтем, что в общем случае вероятность $P[A]$ события A определяется как относительная частота ν появления этого события в серии большого числа $L \rightarrow \infty$ независимых испытаний. Иными словами, вероятность $P[A]$ события A численно равна отношению $\nu = L_A / L$ количества испытаний L_A , при которых произошло событие A , к общему числу независимых испытаний L при $L \rightarrow \infty$. Введем в рассмотрение случайную величину θ , которая равна 1 при появлении события A в результате испытания и равна 0 при отсутствии этого события. Тогда вероятность $P[A]$ события A равна математическому ожиданию (среднему значению) $\langle \theta \rangle$ случайной величины θ .

Воспользуемся этим свойством вероятности P для нахождения значе-

вень x или равна ему, то на выходе компаратора К имеется напряжение 0.

Выходной сигнал $z_x(t)$ компаратора К поступает на вход интегратора И, который осуществляет операцию усреднения (5) в течение времени T_0 . Результат усреднения с выхода интегратора И подается на прибор индикации П, который отображает измеренное значение $F_1^*(x)$ функции распределения $F_1(x)$ для установленного уровня x .

Выбирая значения уровня $x = x_j$ из интервала возможных значений $[x_{min}; x_{max}]$ случайного процесса $\xi(t)$ с некоторым шагом Δx , получаем значения функции $F_1(x_j)$ для выбранных уровней x_j . Здесь $x_j = x_{min} + (j - 1)\Delta x$, $j = 1, 2, 3, \dots N$, а $N = 1 + (x_{max} - x_{min})/\Delta x$ – количество значений уровня $x = x_j$, для которых измеряется функция распределения $F_1(x)$.

1.2.3. Расчет одномерной плотности вероятности.

Пусть измерены значения $F_1^*(x_j)$ функции распределения $F_1(x)$ для различных уровней $x = x_j$, $x_j = x_{min} + (j - 1)\Delta x$, $j = 1, 2, 3, \dots N$, которые выбраны с шагом Δx из интервала возможных значений $[x_{min}; x_{max}]$ случайного процесса $\xi(t)$. Тогда на основе измеренных значений $F_1^*(x_j)$ можно рассчитать соответствующие значения $W_1(x_j)$ плотности вероятности $W_1(x)$ случайного процесса $\xi(t)$ для этих же уровней $x = x_j$.

Для этого учтем, что плотность вероятности $W_1(x)$ является производной от функции распределения $F_1(x)$, т.е. $W_1(x) = dF_1(x)/dx$. Учтем также, что дифференцируемая функция $F_1(x)$ в рассматриваемом случае задана лишь в отдельных точках $x = x_j$ из интервала $[x_{min}; x_{max}]$ с некоторым шагом Δx . Используем определение производной функции, как предел отношения приращения функции к малому приращению ее аргумента. Тогда при малом, но конечном шаге Δx , получаем приближенные оценки $W_1^*(x_j)$ для значений плотности вероятности $W_1(x_j)$:

$$W_1(x_j) \approx W_1^*(x_j) = \frac{1}{\Delta x} [F_1^*(x_{j+1}) - F_1^*(x_j)], \quad j = 1, 2, 3, \dots N - 1, \quad (6)$$

где $x_{j+1} = x_j + \Delta x$, а $x_j = x_{min} + (j - 1)\Delta x$. Точность оценки (6) возрастает с уменьшением шага Δx , который должен быть достаточно мал.

Таким образом, измерив значения $F_1^*(x_j)$ функции распределения $F_1(x)$ в точках $x = x_j$, можно затем по формуле (6) рассчитать соответствующие значения $W_1^*(x_j)$ плотности вероятности $W_1(x)$ в этих же точках.

1.3. Метод измерения одномерной плотности вероятности.

1.3.1. Алгоритм измерения. Согласно (2), значение одномерной плотности вероятности $W_1(x)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ при фиксированном аргументе x определяется как нормированная на δx вероятность события $x \leq \xi(t^*) < x + \delta x$, состоящего в том, что случайный про-

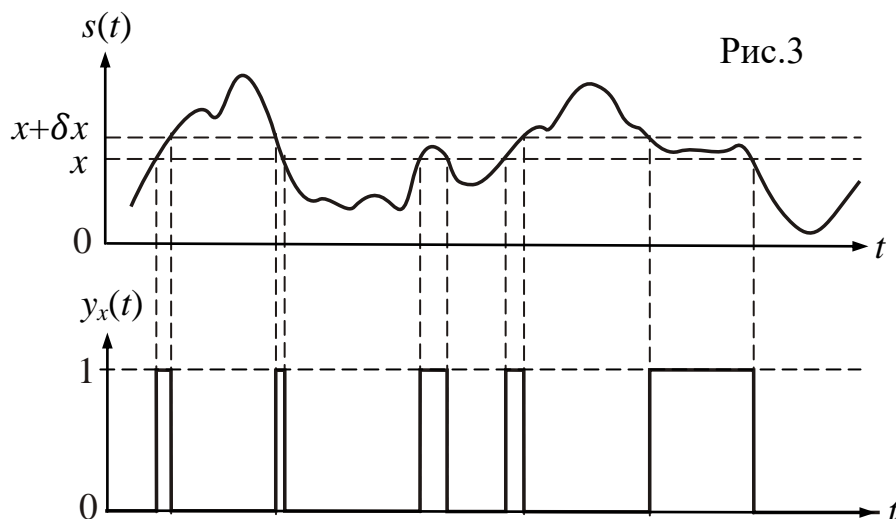
цесс $\xi(t)$ в фиксированный момент времени $t = t^*$ находится в пределах интервала значений $[x; x + \delta x)$ при малой ширине этого интервала $\delta x \rightarrow 0$.

Учтем, что вероятность $P[A]$ события A равна математическому ожиданию (среднему значению) $\langle \theta \rangle$ случайной величины θ , которая в серии последовательных испытаний принимает значение 1 при появлении события A или равна 0 при отсутствии события A в процессе испытания.

Воспользуемся этим свойством вероятности $P[A]$ для нахождения плотности вероятности $W_1(x)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$. Для этого (при фиксированном уровне x) перейдем от случайного процесса $\xi(t)$ к новому случайному процессу

$$\eta_x(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \leq \xi(t) < x + \delta x, \\ 0, & \text{при } \xi(t) < x \text{ или } \xi(t) \geq x + \delta x. \end{cases} \quad (7)$$

Случайный процесс $\eta_x(t)$ формируется из случайного процесса $\xi(t)$ на основе его сравнения с уровнями x и $x + \delta x$. Согласно (7), случайный процесс $\eta_x(t)$ равен 1 на тех интервалах времени t , где исходный процесс $\xi(t)$ попадает в интервал значений $[x; x + \delta x)$. При этом случайный процесс $\eta_x(t)$ равен 0 на тех интервалах времени t , где исходный процесс $\xi(t)$ находится вне интервала значений $[x; x + \delta x)$. Очевидно, что результат такого преобразования зависит от величины уровня x . На рис.3 показан пример формирования реализации $y_x(t)$ случайного процесса $\eta_x(t)$ (7) из реализации $s(t)$ исходного случайного процесса $\xi(t)$.



Вероятность $P[x \leq \xi(t^*) < x + \delta x]$ события $x \leq \xi(t^*) < x + \delta x$ (по указанному выше свойству вероятности) можно представить как математическое ожидание $\langle \eta_x(t^*) \rangle$ случайного процесса $\eta_x(t)$ (7) в момент времени $t = t^*$, где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по реализациям случайного процесса. Поэтому плотность вероятности $W(x)$ (2) случайного процесса $\xi(t)$ при малой, но конечной величине δx , можно приближенно представить как:

$$W_1(x) \approx \langle \eta_x(t^*) \rangle / \delta x. \quad (8)$$

Учтем, что анализируемый случайный процесс $\xi(t)$ и, следовательно, случайный процесс $\eta_x(t)$, являются эргодическими. Поэтому усреднение по реализациям случайного процесса в (8) можно заменить на усреднение одной из его реализаций $y_x(t)$ по времени t на интервале времени длительностью $T_0 \rightarrow \infty$. Производя такую замену *при большом, но конечном* времени усреднения T_0 , получаем приближенную оценку $W_1^{**}(x)$ для значения плотности вероятности $W_1(x)$ случайного процесса $\xi(t)$:

$$W_1(x) \approx W_1^{**}(x) = \frac{1}{T_0 \delta x} \int_{t_0}^{t_0+T_0} y_x(t) dt. \quad (9)$$

Выражение (9) определяет нормированное на δx среднее по времени от реализации $y_x(t)$ случайного процесса $\eta_x(t)$ на интервале усреднения $[t_0; t_0 + T_0]$, где t_0 и T_0 - начало и длительность интервала усреднения.

Точность формулы (9) возрастает с увеличением времени усреднения T_0 . Поэтому время усреднения T_0 должно быть достаточно велико, по крайней мере много больше времени корреляции случайного процесса $\xi(t)$. При этом выбор времени начала усреднения t_0 не имеет значения в силу стационарности случайного процесса $\xi(t)$.

Точность формулы (9) также возрастает с уменьшением ширины δx дифференциального коридора $[x; x + \delta x)$. Исходя из этого можно сделать вывод, что для увеличения точности измерения плотности вероятности $W_1(x)$ ширину δx дифференциального коридора $[x; x + \delta x)$ нужно выбирать как можно меньшей. Однако на практике чрезмерное уменьшение величины δx нецелесообразно. Это объясняется тем, что с уменьшением ширины δx уменьшается время пребывания реализации случайного процесса $\xi(t)$ внутри коридора $[x; x + \delta x)$. При фиксированном времени усреднения T_0 это приводит к увеличению разброса (дисперсии) измеренных значений $W_1^{**}(x)$ от опыта к опыту, что означает уменьшение точности оценок значений функции $W_1(x)$.

Для сохранения высокой точности измерения плотности вероятности $W_1(x)$ при уменьшении ширины дифференциального коридора δx следует увеличивать время усреднения T_0 , что не всегда возможно. Поэтому на практике ширину δx дифференциального коридора $[x; x + \delta x)$ следует выбирать с учетом возможного времени усреднения T_0 и допустимой точности оценки плотности вероятности $W_1(x)$. На практике ширину дифференциального коридора δx часто выбирают как $\delta x = (x_{max} - x_{min})/K$, где $[x_{min}; x_{max}]$ - интервал возможных значений анализируемого случайного процесса $\xi(t)$, а константа K обычно принимается равной 15 - 20.

Следствие. Из (9) следует, что вероятность $P[x \leq \xi(t^*) < x + \delta x]$ по-

падения эргодического стационарного случайного процесса $\xi(t)$ в дифференциальный коридор $[x; x + \delta x)$ численно равна среднему относительно-му времени пребывания реализации процесса $\xi(t)$ в этом коридоре.

Действительно (см. рис.3), реализация $y_x(t)$ случайного процесса $\eta_x(t)$ равна 1 лишь на тех интервалах времени t , где соответствующая реализация $s(t)$ случайного процесса $\xi(t)$ попадает в дифференциальный коридор $[x; x + \delta x)$. На остальных интервалах времени t реализация $y_x(t)$ случайного процесса $\eta_x(t)$ равна 0. Тогда при интегрировании реализации $y_x(t)$ в течение времени $[t_0; t_0 + T_0]$ получаем *полное время ее пребывания* в интервале $[x; x + \delta x)$ за время усреднения T_0 . Деление полного времени пребывания на время усреднения T_0 дает среднее *относительное* время пребывания реализации процесса на интервале $[x; x + \delta x)$.

Отсюда также следует, что значение одномерной плотности вероятности $W_1(x)$ случайного процесса $\xi(t)$ при фиксированном уровне x численно равна среднему относительно-му времени пребывания реализации этого процесса в дифференциальном коридоре $[x; x + \delta x)$, деленному на ширину этого коридора δx при условии $\delta x \rightarrow 0$.

Таким образом, алгоритм измерения значений одномерной плотности вероятности $W_1(x)$ стационарного эргодического случайного процесса $\xi(t)$ задается формулой (9) с учетом преобразования (7).

1.3.2. Схема и принцип действия измерительного устройства.

Блок-схема устройства для измерения плотности вероятности $W_1(x)$, соответствующая формулам (7), (9), показана на рис.4, где обозначено: K_1 и K_2 – компараторы (амплитудные селекторы), «–» – вычитающее устройство, И – интегратор, а П – прибор индикации.

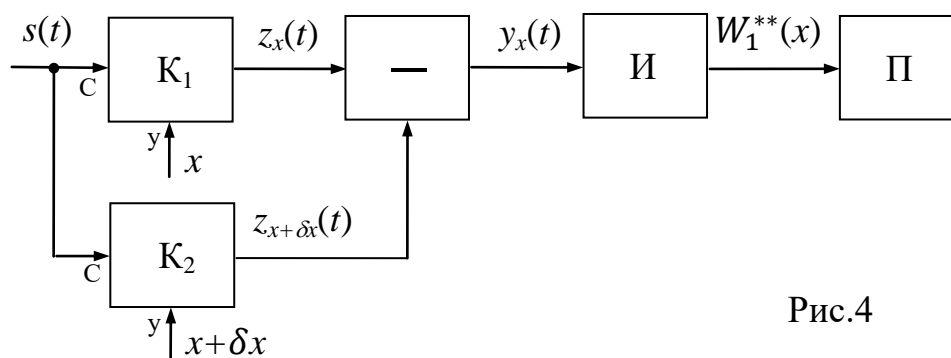


Рис.4

Принцип работы этого устройства сводится к следующему. На сигнальные входы С компараторов K_1 и K_2 подается реализация $s(t)$ случайного процесса $\xi(t)$. На управляющие входы У компараторов K_1 и K_2 подаются напряжения пороговых уровней x и $x + \delta x$ соответственно. Каждый компаратор непрерывно производит сравнение реализации $s(t)$ с пороговым уровнем, который имеется на его управляющем входе У. Если реализация $s(t)$ находится ниже порогового уровня, то на выходе компаратора имеется

напряжение 1. Если же реализация $s(t)$ превышает этот уровень или равна ему, то на выходе компаратора имеется напряжение 0.

В результате на выходе компаратора K_1 формируется реализация $z_x(t)$ случайного процесса $\gamma_x(t)$ (3), а на выходе компаратора K_2 – реализация $z_{x+\delta x}(t)$ случайного процесса $\gamma_{x+\delta x}(t)$. При этом случайный процесс $\gamma_{x+\delta x}(t)$ отличается от случайного процесса $\gamma_x(t)$ (3) выбором порогового уровня $x + \delta x$ вместо уровня x .

Реализации $z_x(t)$ и $z_{x+\delta x}(t)$ с выходов компараторов K_1 и K_2 поступают на вычитающее устройство, которое формирует из них реализацию $y_x(t) = z_{x+\delta x}(t) - z_x(t)$ случайного процесса $\eta_x(t) = \gamma_{x+\delta x}(t) - \gamma_x(t)$.

Реализация $y_x(t)$ с выхода вычитающего устройства поступает на вход интегратора И, который осуществляет операцию усреднения (9) в течение времени T_0 . Результат усреднения с выхода интегратора И подается на прибор индикации П, который отображает измеренное значение плотности вероятности $W(x)$ для выбранного уровня x .

Выбирая значения уровня $x = x_j$ из интервала возможных значений $[x_{min}; x_{max}]$ случайного процесса $\xi(t)$ с некоторым шагом Δx , получаем оценки $W^{**}(x_j)$ значений плотности вероятности $W_1(x_j)$ для выбранных уровней x_j . Здесь $x_j = x_{min} + (j - 1)\Delta x$, $j = 1, 2, 3, \dots N$, а $N = 1 + (x_{max} - x_{min})/\Delta x$ – количество значений уровня $x = x_j$, для которых измеряется плотность вероятности $W_1(x)$.

1.3.3. Расчет одномерной функции распределения.

Пусть измерены значения $W_1^{**}(x_j)$ плотности вероятности $W_1(x)$ для различных уровней $x = x_j$, $x_j = x_{min} + (j - 1)\Delta x$, $j = 1, 2, 3, \dots N$, которые выбраны с шагом Δx из интервала возможных значений $[x_{min}; x_{max}]$ случайного процесса $\xi(t)$. Тогда на основе измеренных значений $W^{**}(x_j)$ можно построить соответствующие оценки $F_1^{**}(x_j)$ функции распределения $F_1(x)$ случайного процесса $\xi(t)$ для этих же уровней $x = x_j$.

Для этого учтем, что функция распределения $F_1(x)$ является интегралом от плотности вероятности $W_1(x)$, т.е.

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x W_1(x') dx'. \quad (10)$$

Учтем, что подинтегральная функция $W_1(x)$ здесь задана в отдельных точках $x = x_j$ из интервала $[x_{min}; x_{max}]$ с некоторым шагом Δx . Тогда, заменяя в (10) интеграл на сумму при малом, но конечном шаге Δx , получаем приближенную оценку $F_1^{**}(x_j)$ для значения функции распределения $F_1(x_j)$:

$$F_1(x_j) \approx F_1^{**}(x_j) = \Delta x \sum_{k=1}^{j-1} W_1^{**}(x_k), \quad j = 2, 3, \dots N, \quad (11)$$

где $x_k = x_{min} + (k - 1)\Delta x$. Точность выражения (11) возрастает с уменьше-