

Теория и анализ методов топологической оптимизации

© П.А. Косых¹, А.В. Азаров^{1,2}

¹ МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

² АО Центральный научно-исследовательский институт
специального машиностроения, Хотьково, 141371, Россия

Для проектирования таких изделий, форма которых близка к оптимальной, широко применяется топологическая оптимизация. Рассмотрены два распространенных подхода к решению этой задачи — с помощью SIMP- и BESO-методов. Раскрыта суть задачи топологической оптимизации, дана ее постановка в общем виде и приведены типичные примеры ее демонстрации. Представлены теоретические основы для каждого из этих методов и особенности их реализации, проанализирована чувствительность алгоритмов к начальным настройкам. Разобраны возникающие при решении этой задачи проблема шахматной доски и проблема зависимости от конечно-элементной сетки, приведены способы, помогающие справиться с ними. Сравнение подходов посредством применения SIMP- и BESO-методов позволило сделать вывод о том, что второй из них обеспечивает более эффективные и более удобные для проектирования решения.

Ключевые слова: топологическая оптимизация, оптимальное проектирование, тело переменной плотности, SIMP-метод, BESO-метод, метод конечных элементов, аддитивные технологии

Введение. В последнее время наблюдается стремительное развитие аддитивных технологий. Современные методы 3D-печати позволяют получать изделия уже не только из обычного пластика, но и из металлов и композитов. Существует много разных способов печати изделий: из пластиков — методами послойного наплавления полимерной нити FDM (Fused Deposition Modeling) и стереолитографии SLA (stereolithography), из металлических порошков — методами селективного лазерного спекания SLS (Selective Laser Sintering) и сплавления SLM (Selective Laser Melting), из композитов — методами печати с использованием непрерывного армирующего волокна (CFF — Continuous Fiber Fabrication, CFC — Continuous Fiber Coextrusion).

С развитием технологий 3D-печати стали улучшаться и механические свойства печатных материалов, благодаря чему появилась возможность использовать изделия, полученные способом печати, в качестве силовых элементов [1, 2]. Неоспоримое преимущество 3D-печати перед традиционными технологиями заключается в том, что она позволяет изготавливать элементы сложной формы, при этом не усложняя технологический процесс и не увеличивая затраты на него. Таким образом, с помощью технологий 3D-печати можно создавать

конструкции, имеющие форму, близкую к оптимальной с точки зрения прикладываемых силовых нагрузок, а также уменьшать массу конечного изделия, что актуально, например, для аэрокосмической отрасли.

Один из путей решения задачи оптимального проектирования — топологическая оптимизация (ТО). В настоящее время появилось достаточно много методов ТО, из которых наиболее широкое распространение получили SIMP-метод, BESO-метод, Level-set-методы, пропорциональная ТО [3–9]. В разных изданиях представлены способы оптимизации структур, напечатанных на 3D-принтере и армированных непрерывным волокном. При таком подходе оптимизируется не только топология изделия, но и ориентация волокон [10–13].

Цель данной работы — продемонстрировать основные идеи ТО и пути ее реализации, сформулировать постановку задачи топологической оптимизации и принципы работы SIMP- и BESO-методов ее обеспечения, представить исследование влияния параметров этих методов на результат, рассмотреть основные проблемы, возникающие при решении задач ТО и способы их устранения, а также провести сравнительный анализ эффективности упомянутых методов.

Постановка задачи ТО. Рассмотрим постановку задачи ТО для упругого тела. Пусть в рабочей области D , для которой определены места креплений и приложения нагрузки, ведется поиск оптимальной по некоторому критерию конструкции Ω с границей Γ . Данная конструкция находится под воздействием объемных сил $f(x)$ и поверхностных сил $t(x)$, где x — координата точки. Под действием приложенных сил возникает поле перемещений $u(x)$. Решение ищется в виде распределения материала в области D .

В качестве критериев оптимизации можно вводить различные целевые функции, минимизация или максимизация которых приводит к оптимальной форме конструкции. Такой целевой функцией может быть вес или объем конструкции, податливость конструкции или обратная ей величина — жесткость, максимальные напряжения или перемещения. Для решения задачи ТО также требуется ввести некоторые ограничения, которыми могут быть масса или объем конструкции, максимальные напряжения и перемещения.

Наиболее распространенной постановкой задачи ТО является такая, в которой в качестве целевой функции выбрана податливость конструкции, а в качестве ограничения — ее максимальный объем. В рамках данной работы будем рассматривать именно эту формулировку задачи.

Выражение для податливости $I(u)$, которая определяется через работу внешних сил над упругим телом, можно представить следующим образом:

$$l(u) = \int_{\Omega} fu d\Omega + \int_{\Gamma} tu d\Gamma, \quad (1)$$

а выражение для потенциальной энергии деформации $a(u, u)$ будет иметь вид

$$a(u, u) = \int_{\Omega} E_{ijkl}(x) \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(u) d\Omega, \quad (2)$$

где $E_{ijkl}(x)$ — тензор упругих постоянных; $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ — линейные деформации тела.

Поскольку тело, форма которого подвергается оптимизации, находится в равновесии с действующими на него нагрузками, условие равновесия необходимо также включить в ограничения задачи оптимизации.

С учетом всех введенных обозначений и ограничений постановка рассматриваемой задачи ТО будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \min l(u); \\ a(u, v) = l(v); \\ \int_{\Omega} d\Omega \leq V, \end{cases} \quad (3)$$

где v — кинематически допустимые вариации поля перемещений; V — максимальный объем, допустимый для конструкции.

Для решения сформулированной задачи традиционно используется метод конечных элементов (МКЭ). В рамках представленной работы решение задачи ТО выполняется в пакете MATLAB. Для того чтобы избежать трудностей, связанных с построением конечно-элементной сетки (КЭС), нумерацией узлов и элементов, а также с составлением глобальной матрицы жесткости, во всех рассматриваемых задачах рабочая область D имеет простую прямоугольную форму, приняты простые граничные условия (ГУ), а сама КЭС состоит из квадратных четырехузловых элементов.

Приведем формулировку задачи ТО, используя принятые в КЭ-анализе обозначения:

$$\begin{cases} \min \mathbf{f}^T \mathbf{u}; \\ \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}; \\ \sum V_e \leq V, V_e \in \Omega, \end{cases} \quad (4)$$

где \mathbf{f} — вектор приложенных сил; \mathbf{u} — вектор перемещений; \mathbf{K} — глобальная матрица жесткости; V_e — объем элемента e .