УДК 517.9:539.3

УСЛОЖНЕННЫЕ СТРУКТУРЫ ГАЛИЛЕЕВО-ИНВАРИАНТНЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

С. К. Годунов, В. М. Гордиенко

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090 Новосибирск

Продолжается исследование галилеево-инвариантных уравнений математической физики, начатое ранее с использованием коэффициентов Клебша — Гордана из теории произведений представленной группы $SO(3)$. Конструируются сложные системы законов сохранения и термодинамические тождества. Приводятся конкретные примеры.

Введение. Данная работа является продолжением начатого в [1] детального исследования термодинамических структур галилеево-инвариантных уравнений математической физики, содержащих законы сохранения массы, импульса и энергии, а также компенсационные энтропийные уравнения. Для того чтобы такие уравнения отражали содержание классических термодинамических соотношений, при их формулировке должна быть использована производящая функция L, зависящая от искомых функций, вектор-функций и температуры. Эта производящая функция выполняет роль термодинамического потенциала среды, описываемой уравнениями. Законы сохранения, порождаемые такими термодинамическими потенциалами, обсуждаются в литературе начиная с 60-х гг. (см. работу [1] и библиографию к ней). Детально описанная в [1] простейшая структура уравнений, к сожалению, не охватывает всех известных и уже достаточно подробно изученных примеров из классической математической физики. Такие примеры описаны в [2] и в заключительной главе монографии [3]. В частности, в простейшую структуру не укладываются уравнения нелинейной упругости, магнитной гидродинамики. Усложненные конструкции законов сохранения, предлагаемые в настоящей работе, уже включают перечисленные примеры. Диссипативные процессы диффузии, теплопроводности и вязкого трения здесь не рассматриваются, за исключением одного примера.

Мы предполагаем от читателя знакомство с работой [1] и используем аналогичные обозначения. Так же как и в [1], мы опираемся на теорию ортогональных представлений группы вращений $SO(3)$, ограничиваясь нечетномерными однозначными представлениями целых весов N.

Усложненные системы уравнений конструируются в п. **2** из исходных простейших, описанных в [1] систем путем добавления в уравнения специальных дополнительных слагаемых. Эти слагаемые подбираются так, чтобы они не нарушали законов сохранения. Подбор возможных слагаемых основан на заранее подготовленной в п. **1** коллекции тождеств обобщенного векторного анализа.

В п. **3** из всех описанных усложненных систем отобраны те, для которых удается доказать, что они допускают запись в виде симметрических гиперболических уравнений. Приводятся варианты замены изучаемых уравнений переопределенными совместными системами законов сохранения. При этом используется и развивается схема, частично опи-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00766).

санная в [3, 4]. В п. **4** содержатся конкретные примеры уравнений, входящих в описываемый класс усложненных термодинамически согласованных структур.

1. Обобщенное векторное исчисление. Так же как в [1], предполагаем, что каждая из неизвестных вектор-функций $\boldsymbol{q}^{(A)}$ при вращениях системы координат преобразуется по неприводимому представлению веса A группы $SO(3)$. Координатный вектор $\boldsymbol{x}$ трехмерного евклидова пространства зададим его декартовыми компонентами x_{-1}, x_0, x_1. Вектор-функция $\boldsymbol{q}^{(N)}$ имеет $2N+1$ вещественные составляющие $q_n^{(N)}$ ($n = -N, -N+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N-1, N$). Вращение координатной системы задается ортогональной матрицей $\mathcal{P}$ с положительным определителем ($\mathcal{P}^{\text{т}}\mathcal{P} = I_3$, $\det \mathcal{P} = +1$), при этом $\boldsymbol{x}$ заменяется на $\hat{\boldsymbol{x}} = \mathcal{P}\boldsymbol{x}$. При таком вращении вектор-функция $\boldsymbol{q}^{(N)}$ преобразуется в $\hat{\boldsymbol{q}}^{(N)} = \Omega^{(N)}(\mathcal{P})\boldsymbol{q}^{(N)}$ с помощью стандартной $(2N+1)\times(2N+1)$-матрицы $\Omega^{(N)}(\mathcal{P})$, осуществляющей представление. По определению представлений $\Omega^{(N)}(I_3) = I_{2N+1}$, $\Omega^{(N)}(\mathcal{P}_1\cdot\mathcal{P}_2) = \Omega^{(N)}(\mathcal{P}_1)\cdot\Omega^{(N)}(\mathcal{P}_2)$.

Вращение $\mathcal{P}$ обычно задается с помощью углов Эйлера φ, θ, ψ:

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Явные формулы для элементов матрицы $\Omega^{(N)}(\mathcal{P})$, по которым эти элементы выражаются через углы Эйлера φ, θ, ψ, приведены в конце нашей предыдущей статьи [1] и обоснованы в [5]. При этом отмечалось, что $\Omega^{(1)}(\mathcal{P}) \equiv \mathcal{P}$.

Сформулируем основные положения теории кронекеровых произведений неприводимых представлений группы вращений. Пусть $\boldsymbol{p}^{(L)}$, $\boldsymbol{r}^{(M)}$ — векторы размерностей $2L+1$ и $2M+1$, преобразующиеся при вращениях по неприводимым представлениям весов L, M. Кронекеровым произведением этих векторов называется прямоугольная $(2L+1)\times(2M+1)$-матрица Π с элементами $\Pi_{lm} = p_l^{(L)}\cdot r_m^{(M)}$. Эту матрицу можно рассматривать как вектор размерности $(2L+1)\times(2M+1)$.

При вращениях $\hat{\boldsymbol{x}} = \mathcal{P}\boldsymbol{x}$ вектор Π преобразуется в $\hat{\Pi}$ преобразованиями, осуществляющими также некоторое представление группы вращений. Такое представление называется *кронекеровым произведением представлений* весов L, M. Если считать, что скалярное произведение в пространстве $(2L+1)\times(2M+1)$-матриц задается формулой $(\Phi, \Pi) = \sum\limits_{l,m} \Phi_{lm}\Pi_{lm} = \operatorname{tr}(\Phi\Pi^{\text{т}})$, то кронекерово произведение ортогональных представлений также будет ортогональным, но если среди весов L, M нет равных нулю, оно оказывается приводимым. Его можно разложить в прямую сумму неприводимых ортогональных представлений весов $|L-M|$, $|L-M|+1$, $|L-M|+2$, …, $L+M-1$, $L+M$. Разложение осуществляется с помощью так называемых коэффициентов Клебша — Гордана. Эти коэффициенты естественно разместить в качестве матричных элементов специальных матриц. Будем называть эти матрицы матрицами Клебша — Гордана. Каждая такая $(2L+1)\times(2M+1)$-матрица $G^k_{K[L,M]}$ составляется из элементов $G^{k[l,m]}_{K[L,M]}$, в записи которых верхние индексы l, m ($-L \leqslant l \leqslant L$, $-M \leqslant m \leqslant M$) указывают номера строки и столбца, на пересечении которых этот элемент расположен. Индексы K, k нумеруют матрицы. Нижний индекс K ($|L-M| \leqslant K \leqslant L+M$) означает вес неприводимого представления, верхний k — номер матрицы, являющейся каноническим базисным элементом в $(2K+1)$-мерном подпространстве матриц, преобразующихся по представлению веса K ($-K \leqslant k \leqslant K$).

В выборе канонических базисов имеется некоторый произвол. Базис, используемый нами, обеспечивает равенство

$$G^k_{K[L,M]} = (-1)^{K+L+M}\{G^k_{K[M,L]}\}^{\text{т}}, \tag{1.1}$$

т. е. перестановка нижних индексов в квадратных скобках приводит к транспонированию матрицы Клебша — Гордана и при нечетной сумме $K+L+M$ — к смене знаков всех элементов. Следует отметить, что условия ортонормированности

$$\operatorname{tr}\{G^k_{K[L,M]} \cdot [G^n_{N[L,M]}]^{\text{т}}\} = \delta_{KN} \cdot \delta_{kn} \tag{1.2}$$

допускают и следующую запись:

$$\sum_{l=-L,\, m=-M}^{l=L,\, m=M} G^{k[l,m]}_{K[L,M]} \cdot G^{n[l,m]}_{N[L,M]} = \delta_{KN}\delta_{kn}.$$

Приведем еще несколько полезных равенств:

$$\begin{gathered} G^{0[\lambda,l]}_{0[L,L]} = \delta_{\lambda l}/\sqrt{2L+1}, \\ G^{k[l,m]}_{K[L,M]} = \sqrt{(2K+1)/(2M+1)}\, G^{m[k,l]}_{M[K,L]} = (-1)^{K+L+M}\sqrt{(2K+1)/(2L+1)}\, G^{l[k,m]}_{L[K,M]}. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Представляя кронекерово произведение векторов $\boldsymbol{p}^{(L)}$ и $\boldsymbol{r}^{(M)}$ в виде линейной комбинации базисных матриц Клебша — Гордана

$$[\boldsymbol{p}^{(L)} \times \boldsymbol{r}^{(M)}] = \sum_{K=|L-M|}^{K=L+M} \Bigl(\sum_{k=-K}^{k=K} w^{(K)}_k G^k_{K[L,M]}\Bigr),$$

естественно коэффициенты $w^{(K)}_k$ этой линейной комбинации сгруппировать в векторы $\boldsymbol{w}^{(K)}$ размерностей $2K+1$. В силу (1.2) компоненты этих векторов вычисляются по правилу

$$w^{(K)}_k = \operatorname{tr}\{[\boldsymbol{p}^{(L)} \times \boldsymbol{r}^{(M)}] \cdot [G^k_{K[L,M]}]^{\text{т}}\}. \tag{1.4}$$

При повороте $\hat{\boldsymbol{x}} = \mathcal{P}\boldsymbol{x}$ координатной системы векторы $\boldsymbol{p}^{(L)}$, $\boldsymbol{r}^{(M)}$ преобразуются с помощью преобразований $\hat{\boldsymbol{p}}^{(L)} = \Omega^{(L)}(\mathcal{P})\boldsymbol{p}^{(L)}$, $\hat{\boldsymbol{r}}^{(M)} = \Omega^{(M)}(\mathcal{P})\boldsymbol{r}^{(M)}$, а это индуцирует преобразования векторов $\hat{\boldsymbol{w}}^{(K)} = \Omega^{(K)}(\mathcal{P})\boldsymbol{w}^{(K)}$. Эти преобразования реализуют неприводимые представления соответствующих весов. Естественно ввести обозначение

$$\boldsymbol{w}^{(K)} = [\boldsymbol{p}^{(L)} \times \boldsymbol{r}^{(M)}]^{(K)} \tag{1.5}$$

и назвать $[\boldsymbol{p}^{(L)} \times \boldsymbol{r}^{(M)}]^{(K)}$ *векторным произведением веса* K векторов $\boldsymbol{p}^{(L)}$, $\boldsymbol{r}^{(M)}$. Напомним, что $|L-M| \leqslant K \leqslant L+M$ или, что то же самое, $K \leqslant L+M$, $L \leqslant M+K$, $M \leqslant K+L$ (неравенства треугольника). Векторное произведение веса 0 только множителем отличается от скалярного произведения векторных сомножителей, которые должны иметь одинаковую размерность (одинаковый вес):

$$[\boldsymbol{p}^{(L)} \times \boldsymbol{r}^{(L)}]^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2L+1}}\,(\boldsymbol{p}^{(L)}, \boldsymbol{r}^{(L)}) = \frac{1}{\sqrt{2L+1}} \sum_{l=-L}^{l=L} p^{(L)}_l r^{(L)}_l. \tag{1.6}$$

Справедливо правило перестановки сомножителей

$$[\boldsymbol{p}^{(L)} \times \boldsymbol{r}^{(M)}]^{(K)} = (-1)^{K+L+M}[\boldsymbol{r}^{(M)} \times \boldsymbol{p}^{(L)}]^{(K)},$$

вытекающее из (1.1).

ŋqdqyeʎ bƎ dəqƎpʎзə d εοαqоʎ ɟqdqʎqʎè