

НОУ ВПО «Академия управления «ТИСБИ»

**Г.В.Альтшулер, Н.Г.Леонтьева**

# **Линейная алгебра и аналитическая геометрия**

Учебно-методическое пособие

Казань 2009

Рекомендовано к печати  
Учебно-методическим советом  
НОУ ВПО «Академия  
Управления «ТИСБИ»

Составители: к.ф.м.н., доцент кафедры математики НОУ ВПО «Академия  
Управления «ТИСБИ» Г.В.Альтшулер;  
к.ф.м.н., доцент кафедры математики НОУ ВПО «Академия  
Управления «ТИСБИ» Н.Г.Леонтьева.

Рецензенты: к.т.н., доцент Е.А.Печеный;  
Старший преподаватель кафедры математики НОУ ВПО  
«Академии управления «ТИСБИ» Л.Р.Пантелеева

НОУ ВПО «Академия управления «ТИСБИ» 2009

## Содержание

Введение .....	4
Тема 1. Матрицы. Операции над матрицами. ....	5
Тема 2. Определители. Свойства определителей. Вычисление определителей. ....	11
Тема 3. Обратные матрицы. Решение систем линейных алгебраических уравнений с помощью обратной матрицы. Формулы Крамера.....	17
Тема 4. Ранг матрицы. Методы нахождения ранга матрицы. ....	21
Тема 5. Линейные операции над столбцами. Понятие линейной зависимости и линейной независимости столбцов. ....	25
Тема 6. Неоднородная система линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса. ....	29
Тема 7 . Однородные системы линейных алгебраических уравнений. ....	35
Тема 8. Векторы. Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов. Базис.....	40
Тема 9. Декартовы координаты векторов. Деление отрезка в заданном отношении.....	46
Тема 10. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов.....	50
Тема 11. Плоскость. ....	57
Тема 12. Прямая в пространстве. ....	63
Тема 13. Прямая на плоскости.....	68
Тема 14. Кривые второго порядка.....	73
Тема 15. Комплексные числа. ....	83
Тема 16. Линейные пространства и собственные вектора .....	89
Контрольные вопросы.....	96
Литература .....	98

## **Введение**

Учебное пособие написано для студентов экономических специальностей. Пособие состоит из 16 тем, посвященные различным аспектам курса. Каждая тема включает теоретическую часть в кратком изложении, решении практических типовых примеров, а также задания для самостоятельной работы студентам, к которым приведены ответы. Учебное пособие имеет своей целью помочь студентам научиться решать типовые задачи по основным темам курса и, естественно, не заменяет лекции и основную рекомендуемую литературу, необходимые для более глубокого изучения предмета.

Структура пособия такова, что оно может быть использовано студентами различных форм обучения – очной, заочной и дистанционной.

**Выписка из Госстандарта.** Математика. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии: операции над векторами; системы линейных алгебраических уравнений; определители и их свойства; собственные значения матриц; комплексные числа; прямые и плоскости в аффинном пространстве; выпуклые множества и их свойства.

## Тема 1. Матрицы. Операции над матрицами.

**Матрицей** размерности  $(m \times n)$  называется **прямоугольная таблица** из  $m \cdot n$  чисел  $a_{ij}$  (элементов матрицы):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n},$$

где  $m$  – число строк матрицы,  $n$  – число столбцов,  $a_{ij}$  – элемент стоящий в  $i$ -ой строке и  $j$ -ом столбце ( $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ ).

Столбец – это матрица  $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  размерности  $(m \times 1)$ . Строка – это матрица

$\bar{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$  размерности  $(1 \times n)$ . Матрица размерности  $(n \times n)$  называется **квадратной порядка  $n$** .

Квадратная матрица называется **треугольной**, если все ее элементы, расположенные выше или ниже главной диагонали равны нулю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется **диагональной**, если все ее элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется **единичной**, если она диагональная матрица и все элементы, стоящие на главной диагонали равны единице: