

**Министерство образования Российской Федерации  
Воронежский государственный университет**

**конспекты лекций и упражнения по курсу**

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА**

**/Логика высказываний/**

**пособие для студентов специальностей 01.03.01, 01.05.01, 02.03.01**

**Воронеж  
2015**

## Оглавление

1. Логика высказываний .....	4
1.1. Определение логического следствия.....	4
1.1.1. Определение высказывания и предиката .....	4
1.1.2. Определение умозаключения, посылок и заключения .....	4
1.1.3. Определение интерпретации и контрпримера .....	4
1.1.4. Определение логического следствия и следствия в теории .....	5
1.1.5. Упражнение .....	6
1.2. Язык логики высказываний .....	6
1.2.1. Логические связки .....	6
1.2.2. Формулы логики высказываний .....	7
1.2.3. Упражнение .....	7
1.2.4. Формализация в логике высказываний .....	8
1.2.5. Упражнение .....	8
1.2.6. Формализация необходимых и достаточных условий .....	9
1.2.7. Упражнение .....	9
1.3. Следствие в логике высказываний .....	10
1.3.1. Стандартные интерпретации .....	10
1.3.2. Таблицы истинности .....	10
1.3.3. Упражнение .....	11
1.3.4. Таблицы истинности и логическое следствие .....	11
1.3.5. Направленная табличная процедура .....	11
1.3.6. Примеры доказательств направленной процедурой .....	12
1.3.7. Примеры доказательств с разветвлением .....	12
1.3.8. Упражнение .....	13
1.3.9. Упражнение .....	13
1.3.10. Определение логической эквивалентности, тавтологии и противоречия .....	14
1.3.11. Упражнение .....	15
1.3.12. Упражнение .....	15
1.3.13. Упражнение .....	15
1.3.14. Свойства логического следствия, эквивалентности, тавтологии и противоречия .....	15
1.3.15. Упражнение .....	16
1.4. Основные теоремы логики высказываний .....	16
1.4.1. Теорема об отрицании, конъюнкции и дизъюнкции .....	16
1.4.2. Теорема об импликации и двойной импликации .....	17
1.4.3. Упражнение .....	17
1.4.4. Замечания об истории, терминологии и обозначениях .....	17
1.4.5. Нормальные формы .....	18
1.4.6. Упражнение .....	19
1.4.7. Анализ и синтез контактных схем .....	19
1.4.8. Упражнение .....	21
1.4.9. Упражнение .....	21
1.4.10. Полные системы булевых функций .....	21
1.4.11. Упражнение .....	22
Литература .....	22

Например, в теории действительных чисел из неравенства  $a < b$  не следует неравенство  $a^2 < ab$ , как показывает согласованный с этой теорией контрпример:  $a = -2, b = 1$ .

Из этого примера, кстати, видно, что для построения согласованных с данной теорией  $T$  интерпретаций предикатов этой теории не так уж много возможностей: можно только придавать именам неопределенных объектов допустимые конкретные значения.

### 1.1.5. Упражнение.

Доказать, что заключение не является логическим следствием посылок. Определить, является ли оно следствием в теории.

1. Неверно, что 7 делится на 2 и на 3. Следовательно, 7 не делится на 2 и не делится на 3.
2. Если число 9 делится на 4, то оно делится на 2. Следовательно, если 9 не делится на 4, то 9 не делится на 2.
3. Число  $n$  не делится на 2 или не делится на 3. Следовательно, неверно, что  $n$  делится на 2 или на 3.
4. Если число  $n$  делится на 2 и на 5, то  $n$  делится на 10.  $n$  не делится на 10. Следовательно,  $n$  не делится на 2 и не делится на 5.
5. В множестве  $A$  не существует числа  $a$ , которое удовлетворяет неравенству  $a > 3$ . Следовательно, для любого числа  $a$  из  $A$  справедливо неравенство  $a \leq 3$ .
6. Существует рациональное число, которое больше 0, и рациональное число, которое меньше 1. Следовательно, существует рациональное число, которое больше 0 и меньше 1.
7. Для любой фигуры из данного списка верно, что она является треугольником или квадратом. Следовательно, любая фигура из этого списка есть треугольник или все фигуры в данном списке являются квадратами.
8. Для любого числа  $a$  из множества  $A$  существует натуральное  $N$ , такое, что  $a < N$ . Следовательно, существует такое натуральное  $N$ , что для любого  $a$  из  $A$  выполнено неравенство  $a < N$ .

## 1.2. Язык логики высказываний

### 1.2.1. Логические связки.

♣ Как сказано выше, логическая *форма* предложения определяется семью перечисленными в 1.1.3 выражениями. ♦ Первые пять из них называются *логическими связками*; они изучаются в *логике высказываний*. Последние два - *квантором общности* и *квантором существования*; их изучением занимается *логика предикатов*. ♦ Логические связки и кванторы рассматриваются в логике как *операции*, с помощью которых из данных предикатов, называемых *операндами*, строятся более сложные предикаты. ♦ Для логических связок

вводятся следующие обозначения и названия: «неверно, что  $A$ » –  $\neg A$  ( $\bar{A}$ ) – *отрицание*; « $A$  и  $B$ » –  $A \wedge B$  ( $AB, A \& B$ ) – *конъюнкция*; « $A$  или  $B$ » –  $A \vee B$  – *дизъюнкция*; «если  $A$ , то  $B$ » –  $A \rightarrow B$  – *импликация*; « $A$ , если и только если  $B$ » –  $A \leftrightarrow B$  – *двойная импликация*. ♦ Формальные определения логических связок задаются в виде *таблиц истинности*, определяющих истинностные значения сложных предикатов через истинностные значения операндов:

$A$	$B$	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
<i>и</i>	<i>и</i>	<i>л</i>	<i>и</i>	<i>и</i>	<i>и</i>	<i>и</i>
<i>и</i>	<i>л</i>		<i>л</i>	<i>и</i>	<i>л</i>	<i>л</i>
<i>л</i>	<i>и</i>	<i>и</i>	<i>л</i>	<i>и</i>	<i>и</i>	<i>л</i>
<i>л</i>	<i>л</i>		<i>л</i>	<i>л</i>	<i>и</i>	<i>и</i>

### 1.2.2. Формулы логики высказываний.

♦ В результате последовательного применения логических связок к простым предикатам, обозначенным буквами, получаются *формулы логики высказываний*. Порядок действий в них, как и в алгебраических формулах, задаётся с помощью скобок. ♣ Например, для формулы  $((\neg A) \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$  действия в порядке их выполнения можно пронумеровать следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccccc} ((\neg & A) & \rightarrow & B) & \wedge & (A & \rightarrow & B)) & \rightarrow & B \\ 1 & & 2 & & 4 & & 3 & & 5 \end{array}$$

♣ Словами данную формулу можно прочесть так: если отрицание  $A$  влечёт  $B$  и  $A$  влечёт  $B$ , то справедливо  $B$ . ♦ Как и в алгебре, в логике принято *соглашение о порядке действий*, в соответствии с которым при отсутствии скобок операции выполняются в следующем порядке:  $\neg, \wedge, \vee, \{\rightarrow, \leftrightarrow\}$  (импликация и двойная импликация считаются действиями одной степени, то есть при отсутствии скобок они выполняются в порядке слева направо). ♣ Например, рассмотренную выше формулу можно записать в виде  $(\neg A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$ . Если же опустить и оставшиеся четыре скобки, то порядок действий и смысл формулы будет иной:

$$\begin{array}{ccccccccc} \neg & A & \rightarrow & B & \wedge & A & \rightarrow & B & \rightarrow & B \\ 1 & & 3 & & 2 & & 4 & & 5 \end{array}$$

### 1.2.3. Упражнение.

Записать формулу на обычном языке. Найти интерпретации предложений  $A, B, C$ , в которых она истинна и ложна.

1.  $A \wedge \neg B \leftrightarrow C \rightarrow \neg A$ .

7.  $(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow A)$ .

2.  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$ .

8.  $(A \wedge \neg C \vee B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (A \vee \neg B)$ .

- |  |   |
|--|---|
| 3. $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow A \wedge \neg B$ .             | 9. $(A \rightarrow C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge B \wedge \neg C$ .                  |
| 4. $(A \rightarrow B \vee C) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$ .       | 10. $(A \rightarrow B) \wedge A \wedge (\neg B \vee \neg C)$ .                            |
| 5. $A \vee (\neg B \leftrightarrow C) \rightarrow \neg A$ .              | 11. $(\neg A \rightarrow B \vee C) \wedge (C \rightarrow B)$ .                            |
| 6. $(A \rightarrow B \wedge C) \wedge (B \vee (\neg C \rightarrow A))$ . | 12. $(A \rightarrow C) \wedge (\neg B \rightarrow \neg C) \wedge \neg(A \rightarrow B)$ . |

#### 1.2.4. Формализация в логике высказываний.

♦ Сложности записи утверждения, сформулированного на обычном языке общения, в виде логической формулы аналогичны проблемам перевода с одного языка на другой. Правда, следует заметить, что язык формальной логики существенно беднее любого языка общения, что значительно облегчает задачу перевода, которую можно осуществлять, придерживаясь следующего алгоритма. В предложении следует выделить основную его форму ( “не верно, что ...”, “... и ...”, “... или ...”, “если ..., то ...”, “..., тогда и только тогда, когда ...” и т.п.) и заменить её на соответствующую логическую формулу ( $\neg A$ ,  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ ,  $A \rightarrow B$ ,  $A \leftrightarrow B$ ). Затем с каждой частью предложения, обозначенной в полученной формуле буквами  $A$  и  $B$  и представляющей собой самостоятельное утверждение, проделать ту же процедуру, если только утверждение не оказывается простым высказыванием. После этого буквы  $A$  и  $B$  в первоначальной формуле заменяются на полученные вместо них формулы. Повторяем процесс формализации до тех пор, пока все буквы формулы не будут соответствовать простым высказываниям. В процессе формализации необходимо следить за тем, чтобы разные вхождения одного и того же высказывания обозначались одной буквой, а разные высказывания были обозначены разными буквами.

♣ Например, формализуем утверждение “Произведение  $ab$  положительно в том и только том случае, когда  $a$  и  $b$  оба положительны или оба отрицательны”. Основная форма этого предложения – “... в том и только том случае, когда ...”, аналогичная форме “..., тогда и только тогда, когда...”. Заменяем её на формулу  $A \leftrightarrow X$ , где  $A$  – “Произведение  $ab$  положительно” и  $X$  – “ $a$  и  $b$  – оба положительны или оба отрицательны”.  $A$  является простым высказыванием, а  $X$  имеет форму “... или ...”, заменяем её на  $Y \vee Z$  в первоначальной формуле:  $A \leftrightarrow Y \vee Z$ . Высказывания  $Y$  – “ $a$  и  $b$  – оба положительны” и  $Z$  – “ $a$  и  $b$  – оба отрицательны” имеют одну и ту же форму, которую легче определить, переформулировав эти предложения без изменения смысла следующим образом.  $Y$  – “ $a$  положительно и  $b$  положительно”,  $Z$  – “ $a$  отрицательно и  $b$  отрицательно”. Форму “... и ...” этих предложений заменим на формулы  $B \wedge C$  и  $D \wedge E$ . Подставляя их в основную формулу вместо  $Y$  и  $Z$ , получим окончательно:  $A \leftrightarrow B \wedge C \vee D \wedge E$ .  $B$  – “ $a$  – положительно”,  $C$  – “ $b$  – положительно”,  $D$  – “ $a$  – отрицательно”,  $E$  – “ $b$  – отрицательно” – простые высказывания.

#### 1.2.5. Упражнение.

Записать следующие утверждения в виде формул логики высказываний.