МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ПРЕДЕЛ БЕЗ СЕКРЕТОВ

Учебно-методическое пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2015

Введение

Настоящая методическая разработка не заменяет учебник, но позволяет углубить понимание предела последовательности и предела функции. В работе приведены только основные определения и теоремы, без которых нельзя приступить к решению задач. Задачи можно условно разделить на два типа: это задачи теоретические, направленные на понимание теории, и задачи вычислительные. В задачах на вычисление предела приведены основные типовые приемы вычислений, комбинируя которые и проявляя творчество можно будет приступать и к более серьезным задачам.

§ 1. Предел последовательности

Отображение $f : \mathbb{N} \to R$ называется *числовой последовательностью.* Обозначим $f(n) = x_n$, тогда последовательность записывается в виде $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ (сокращенно $\{x_n\}$). Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называются *членами* последовательности, $x_n = f(n)$ называется *общим членом* последовательности.

Определение 1.1. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$, найдется номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что для всех номеров $n > n_0$ будет выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Заметим, что $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in U(a, \varepsilon)$, где $U(a, \varepsilon)$ *окрестность* точки a радиуса ε.

Определение 1.2 (в логических символах): $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_0 : |x_n - a| < \varepsilon.$

Определение 1.3 (геометрическая форма). Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любой, заранее выбранной, окрестности $U(a, \varepsilon)$ найдется номер $n_0 \in \mathbb{N}$, такой что все члены последовательности с номерами $n > n_0$ будут принадлежать $U(a, \varepsilon)$.

Определение 1.4 (1.3 в логических символах): $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n > n_0 : x_n \in U(a, \varepsilon).$

Замечание. Понятно, что во всех случаях n_0 может зависеть от ε. Понятие окрестности точки a можно распространить на понятие окрестности бесконечно удаленной точки:

$$x \in U(+\infty, E) \Leftrightarrow x \in (E, +\infty) \Leftrightarrow E < x < +\infty,$$
$$x \in U(-\infty, E) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -E) \Leftrightarrow x < -E,$$
$$x \in U(\infty, E) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -E) \cup (E, +\infty) \Leftrightarrow |x| > E.$$

Значит последовательность x_n убывающая, начиная с первого номера. Далее очевидно, что $x_n = \dfrac{2^n}{n!} \geqslant 0$. Это означает, что последовательность ограничена снизу. В силу теоремы Вейерштрасса такая последовательность имеет предел, равный некоторому a. Пока еще мы не знаем, что $a = 0$. Докажем, что $a = 0$:

$$0 \leqslant x_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{2}{n} = x_{n-1} \cdot \frac{2}{n}.$$

По доказанному $x_n \to a$, тогда $x_{n-1} \to a$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ (см. пример 1). Откуда $x_{n-1} \cdot \dfrac{2}{n} \to a \cdot 0 = 0$. По теореме (о двух полицейских) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Теорема о действиях с последовательностями.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, т. е. x_n, y_n сходящиеся, тогда

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b,$$
$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}, \text{ если } b \neq 0.$$

Следствие 1. Есть и другие действия с последовательностями, вытекающие из предыдущей теоремы и свойств бесконечно малых и бесконечно больших (см. учебник).

1.1. Пусть $x_n \to a \neq 0$, $y_n \to 0$, тогда $\dfrac{x_n}{y_n} \to \infty$.

1.2. Пусть $x_n \to a \neq 0$, $y_n \to \infty$, тогда $x_n y_n \to \infty$.

1.3. Пусть $x_n \to a$, $y_n \to \infty$, тогда $x_n + y_n \to \infty$.

1.4. Пусть $x_n \to a$, $y_n \to \infty$, тогда $\dfrac{x_n}{y_n} \to 0$.

Неопределенные выражения

Если $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$, то $x_n - y_n$ называется *неопределенным выражением* вида $\infty - \infty$. Для вычисления надо сделать подходящие дополнительные действия.

Другие виды неопределенных выражений: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, 1^∞, 0^0, ∞^0.

Основные приемы раскрытия неопределенностей

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+1}{2n^2+n+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\left(3+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}=$ сократить на старшую степень $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{3}{2}.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=(\infty-\infty)=$ умножить и разделить на сопряженное выражение $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-n+1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=0$ (по следствию 1.4).

Другие методы раскрытия неопределенностей будут изложены при вычислении предела функции.

§ 2. Последовательности. Верхний и нижний пределы последовательности

Определение. Последовательность, составленная из членов последовательности $\{x_n\}$ и в которой порядок следования элементов совпадает с их порядком следования в исходной последовательности $\{x_n\}$, называется *подпоследовательностью* этой последовательности.

Теорема. Если последовательность имеет конечный или бесконечный предел, то любая ее подпоследовательность имеет тот же предел.

Пример 7. Доказать, что последовательность $1,\dfrac{1}{2},1,\dfrac{1}{3},1,\dfrac{1}{4},\ldots$ расходящаяся (см. пример 2).

Доказательство.

Выберем члены, стоящие на четных местах $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\ldots$. Предел такой подпоследовательности равен 0. Выберем члены, стоящие на четных местах $1,1,1,\ldots$. Предел такой подпоследовательности равен 1. В силу вышеприведенной теоремы предел исходной последовательности не существует.

Для изучения последовательностей, предел которых не существует, вводится понятие верхнего предела, нижнего предела.

Предел подпоследовательности называется *частичным пределом.*

Определение 2.2. Наибольший частичный предел последовательности $\{x_n\}$ называется ее верхним пределом $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, а наименьший частичный предел последовательности $\{x_n\}$ называется ее нижним пределом $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Имеет место теорема, утверждающая, что у любой последовательности существует как наибольший, так и наименьший частичные пределы.

Теорема 1а. Для того чтобы $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = b$, достаточно выполнения следующих двух условий:

1. $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для $\forall\, n > n_0$ выполняется неравенство $x_n < b + \varepsilon$.

2. Существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, такая что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = b$.

Замечание. Из п. 1 следует, что частичного предела, большего b, не существует.

Теорема 1б. Для того чтобы $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = a$, достаточно выполнения следующих двух условий:

1. $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для $\forall\, n > n_0$ выполняется неравенство $x_n > a - \varepsilon$.

2. Существует подпоследовательность $\{x_{n_m}\}$, такая что $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = a$.

Пример 2.1. Найти верхний и нижний пределы последовательности $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Решение. $\cos\dfrac{n\pi}{2}$ при $n = 1, 2, \ldots$ последовательно принимает значения $0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots$. Последовательность $\dfrac{n}{n+1}$ имеет пределом 1, а значит, и любая ее подпоследовательность имеет пределом 1. Чтобы получить возможно больший частичный предел, выберем $n = 4k$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{4k}{4k+1}\cos\frac{4k\pi}{2}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{4k}{4k+1}\right) = 2.$$

Отсюда следует, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \geqslant 2$. Проверим пункт 1 теоремы 1а:

$$1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2} \leqslant 1 + \frac{n}{n+1} < 2 < 2 + \varepsilon \quad \text{для } \varepsilon > 0.$$

По теореме доказано $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 2$.

Аналогично доказывается, что $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0$.