

УДК 517.927.7, 514.762.5
ББК 79



Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
по проекту № 04-01-14020.

Итс А. Р., Капаев А. А., Новокшенов В. Ю., Фокас А. С.

Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана. — Москва–Ижевск:
Институт компьютерных исследований; НИЦ «Регулярная и хаотиче-
ская динамика», 2005. — 728 с.

В монографии излагается современная теория уравнений Пенлеве и их
решений (трансцендентов Пенлеве) с позиций метода изомодромных де-
формаций.

В первой части монографии подробно рассмотрена связь теории задач
Римана с аналитической теорией линейных дифференциальных уравнений
с рациональными коэффициентами. Обсуждается разрешимость прямой и
обратной задач монодромии для таких уравнений, которые лежат в основе
метода интегрирования уравнений Пенлеве. Во второй и третьей частях кни-
ги общий метод задачи Римана применяется к конкретным задачам вычис-
ления глобальных асимптотик второго и третьего трансцендентов Пенлеве.

В монографии широко представлены приложения уравнений Пенлеве к
задачам современной математической физики. Систематическое перечисле-
ние методов интегрирования и явных формул для трансцендентов Пенлеве
могут сделать книгу справочным пособием для широкого круга математи-
ков, физиков и инженеров. Изложение материала не требует от читателя
дополнительных знаний кроме знакомства со стандартными курсами обык-
новенных дифференциальных уравнений и комплексного анализа.

ISBN 5-93972-443-4

ББК 79

© В. Ю. Новокшенов, 2005

© Институт компьютерных исследований, 2005

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005

<http://rcd.ru>

Оглавление

Предисловие	9
ВВЕДЕНИЕ. Трансценденты Пенлеве как нелинейные специальные функции	13
1. Исторический обзор	13
2. Асимптотические результаты	24
3. Приложения функций Пенлеве	31
3.1. Двумерная квантовая гравитация и РІ	33
3.2. Трёхмерный волновой коллапс и РІІ	35
3.3. Связанные состояния в эллиптическом уравнении синус-Гордон и РІІІ	38
3.4. Случайные матрицы и случайные перестановки	41
 ЧАСТЬ I. ЗАДАЧА РИМАНА, ИЗОМОНОДРОМНЫЙ МЕТОД И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ	45
 ГЛАВА 1. Системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами. Элементы общей теории	48
1. Основные обозначения и факты	48
2. Локальная теория	50
2.1. Классификация точек	50
2.2. Регулярная точка	53
2.3. Фуксова особая точка	54
2.4. Иррегулярная особая точка. Явление Стокса.	61
3. Глобальная теория	72
3.1. Теорема монодромии	72
3.2. Оператор монодромии	77

ГЛАВА 2. Теория монодромии и задача Римана. Специальные функции	79
1. Группа монодромии	79
1.1. Данные монодромии для системы линейных ОДУ	79
1.2. Определение группы монодромии	84
1.3. Параметризация данными монодромии. Фуксовы уравнения	87
1.4. Параметризация данными монодромии. Нефуксов случай	89
1.5. Прямая и обратная задачи монодромии. Задачи Римана–Гильберта и Римана–Гильберта–Биркгофа	90
2. Системы с 2×2 матрицами. Специальные функции	91
2.1. Две фуксовы точки	91
2.2. Три регулярные особые точки. <i>Гипергеометрическая функция</i>	92
2.3. Четыре фуксовы точки	98
2.4. Одна иррегулярная особая точка ранга Пуанкаре 1	109
2.5. Одна иррегулярная особая точка ранга Пуанкаре 2. <i>Функции параболического цилиндра</i>	109
2.6. Одна иррегулярная особая точка ранга Пуанкаре 3	115
ГЛАВА 3. Обратная задача монодромии и факторизация Римана	121
1. Задачи Римана	121
2. Фуксовы системы. Современный взгляд на 21-ю проблему Гильберта	125
3. Системы с 2×2 матрицами	128
3.1. Четыре регулярные особые точки	128
3.2. Одна нерегулярная особая точка ранга Пуанкаре 3	148
ГЛАВА 4. Изомонодромные деформации. Уравнения Пенлеве	164
1. Общие определения	164
2. Фуксов случай. Уравнения Шлезингера	175
3. Изомонодромные деформации для 2×2 систем: уравнения Пенлеве	178
3.1. Две фуксовых точки	178
3.2. Три фуксовых точки	179
3.3. Четыре фуксовых точки. Гипергеометрическое уравнение и уравнение Пенлеве VI	181

3.4.	Одна иррегулярная особая точка ранга ≤ 2	187
3.5.	Одна иррегулярная особая точка ранга 3: уравнение Эйри и уравнение Пенлеве II	187
ГЛАВА 5.	Изомонодромный метод	195
1.	Второй трансцендент Пенлеве	195
2.	Четвертый трансцендент Пенлеве	216
3.	Первый трансцендент Пенлеве	227
4.	Третий трансцендент Пенлеве	238
5.	Пятый трансцендент Пенлеве	250
6.	Глобальные решения уравнений Пенлеве	261
6.1.	Задача Римана для уравнения Пенлеве IV	264
6.2.	Уравнение Пенлеве III	267
6.3.	Задача Римана для уравнения Пенлеве V	269
ГЛАВА 6.	Преобразования Беклунда	272
1.	Уравнение RII	273
2.	Уравнение RIII	275
3.	Уравнение RIV	278
4.	Трансцендентная природа решения RII	282

ЧАСТЬ II. АСИМПТОТИКИ ВТОРОГО ТРАНСЦЕНДЕНТА ПЕНЛЕВЕ 287

ГЛАВА 7.	Асимптотические решения уравнения RII в комплексной плоскости. Прямая задача монодромии	290
1.	Предварительные замечания. Метод Бутру	291
2.	Прямая задача монодромии. Формулировка основной теоремы	295
3.	ВКБ-анализ Ψ -функции	299
4.	Локальные решения около точки поворота	305
5.	Аппроксимация данных монодромии	308
6.	Униформизация тета-функциями. Обоснование анзаца Бутру	313
6.1.	Доказательство основной теоремы. Обоснование асимптотических разложений	320

ГЛАВА 8. Асимптотические решения уравнения РП в комплексной плоскости. Обратная задача монодромии . . .	325
1. Предварительные замечания. Метод Дейффа–Жу	325
2. Параметризация задачи Римана для РП в комплексной плоскости	330
3. Преобразование задачи Римана	333
4. Построение функции $g(z)$	344
5. Модельная задача Римана в терминах функций Бейкера–Ахиезера	347
6. Локальные задачи Римана около точек ветвления	356
6.1. Задача Римана, разрешимая с помощью функций Эйри	356
6.2. Параметризация в окрестности точки ветвления z_3	358
6.3. Параметризация в окрестности точки ветвления z_1	361
7. Асимптотическое решение основной задачи Римана	365
8. Асимптотики функции Пенлеве	371
ГЛАВА 9. Асимптотики РП на шести канонических лучах. Чисто мнимый случай	373
1. Формулировка результатов и обсуждение	374
2. Доказательство Теоремы 9.1	380
3. Доказательство Теоремы 9.2	397
ГЛАВА 10. Асимптотики РП на шести канонических лучах. Вещественный случай	405
1. Формулировка результатов. Главные теоремы и обсуждение	406
2. Доказательство Теоремы 10.1: асимптотики функций Пенлеве при $x \rightarrow +\infty$	411
3. Доказательство Теоремы 10.2: асимптотики функций Пенлеве при $x \rightarrow -\infty$	434
4. Деформация задачи Римана, связанной с асимптотиками $x \rightarrow -\infty$	441
5. Деформация задачи Римана, ассоциированная с асимптотикой $x \rightarrow +\infty$	446
ГЛАВА 11. Квазилинейное явление Стокса для РП	455
1. Явление Стокса в линейном случае	456
2. Замечания по явлению Стокса для РП	461
3. Модификация задачи Римана для РП	464

3.1.	Задача Римана для $\mathbf{1} + \mathbf{s_0s_1} = \mathbf{0}$	470
4.	Специальные точки поверхности монодромии	472
5.	Неспециальные точки поверхности монодромии	481
5.1.	Случай $\alpha - \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ и $\mathbf{1} + \mathbf{s_0s_1} = \mathbf{0}$	481
6.	Асимптотическое решение для $s_2 = 0$	501
7.	Убывающие вырожденные функции Пенлеве	518
8.	Вырожденные решения	521

ЧАСТЬ III. АСИМПТОТИКИ ТРЕТЬЕГО ТРАНС- ЦЕНДЕНТА ПЕНЛЕВЕ 525

ГЛАВА 12.	Уравнение РIII. Краткий обзор	528
1.	Основные преобразования и элементарные решения	528
2.	Рациональные решения РIII	531
3.	Алгебраические решения РIII	535

ГЛАВА 13.	Специальное уравнение РIII: автомодельная ре- дукция уравнения синус-Гордон	538
1.	Прямая задача монодромии для SG-редукции уравнения РIII	542
2.	Обратная задача монодромии	551
3.	Обратная задача монодромии для экспоненциальных ре- шений SG-РIII	554

ГЛАВА 14.	Канонические четыре луча. Вещественные ре- шения SG-РIII	559
1.	Параметризация данных монодромии при $x = 0$	560
2.	Параметризация данных монодромии на бесконечности	566
3.	Асимптотики неособых решений	572
3.1.	Формулы связи для неособых решений	575
3.2.	Структура сепаратрисного решения	581

ГЛАВА 15.	Канонические четыре луча. Чисто мнимый слу- чай SG-РIII	587
1.	Данные монодромии и разложение в ряд Лорана около полюса	587
1.	Данные монодромии	591
2.	Асимптотические разложения Ψ -функции	594
3.	Уравнение Матье для главного члена Ψ -функции	598

4.	Асимптотическое распределение полюсов трансцендента SG-РШ	604
ГЛАВА 16. Асимптотика трансцендента SG-РШ в комплекс-		
	ной плоскости	609
1.	Прямая задача монодромии	614
2.	ВКБ-приближение для Ψ -функции	617
3.	Асимптотики в точках поворота	622
4.	Нули эллиптического анзаца для функции Пенлеве	627
Приложение А. Доказательство Теоремы 3.4		
1.	Теорема Сибуйя с параметром	634
2.	Локальное решение задачи Римана.	649
3.	Решение задачи Римана.	655
Приложение В. Теорема Биркгофа–Гротендика с пара-		
	метром	658
Приложение С. Трехпараметрическое уравнение РШ		
1.	Введение	671
2.	Многообразие данных монодромии	678
3.	Сводка результатов	686
4.	Преобразования Беклунда	694
4.1.	Точечные симметрии Ли	697
4.1.1.	$\tau \rightarrow -\tau$	698
4.1.2.	$a \rightarrow -a$	699
4.1.3.	$\tau \rightarrow i\tau$	700
5.	Асимптотики для мнимого τ	702
Библиография		709
Предметный указатель		725