

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

# КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Курс лекций  
Часть 1

Воронеж  
Издательский дом ВГУ  
2016

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1. Основы квантовой механики</b>	<b>6</b>
1.1. Предпосылки возникновения квантовой теории . . . . .	6
1.2. Квантовые состояния. Волновые функции . . . . .	10
1.3. Принцип суперпозиции состояний . . . . .	14
1.4. Нормировка волн де Бройля . . . . .	16
1.5. Средние значения координаты и импульса . . . . .	18
1.6. Физические величины в квантовой теории . . . . .	20
1.7. Определенные значения физических величин . . . . .	27
1.8. Свойства собственных функций и собственных значений линейного эрмитова оператора . . . . .	30
1.9. Оператор с непрерывным спектром собственных значений	33
1.10. Совместная измеримость физических величин . . . . .	36
1.11. Соотношение неопределенностей . . . . .	38
1.12. Временное уравнение Шредингера . . . . .	40
1.13. Плотность потока вероятности . . . . .	44
1.14. Стационарные состояния . . . . .	46
1.15. Дифференцирование операторов по времени . . . . .	48
1.16. Интегралы состояния . . . . .	50
<b>Глава 2. Простейшие задачи квантовой механики</b>	<b>55</b>
2.1. Одномерное движение . . . . .	55
2.2. Линейный гармонический осциллятор . . . . .	57
2.3. Одномерное движение в однородном поле . . . . .	62
2.4. Момент количества движения (момент импульса) . . . . .	63
2.5. Общие свойства движения в центральном поле . . . . .	67
2.6. Задача двух тел . . . . .	71
2.7. Движение в кулоновском поле притяжения. Атом водорода	73
2.8. Распределение заряда электрона в атоме . . . . .	78
2.9. Токи в атомах. Магнетон . . . . .	81

## Глава 1

# Основы квантовой механики

В данной главе читатель знакомится с основными понятиями и математическим аппаратом квантовой механики — важнейшего раздела квантовой теории. В нем исследуется механическое движение в микромире, т. е. в системах с классическим действием  $S$ , имеющим величину порядка постоянной Планка  $\hbar$ . К таким объектам относятся *структурные элементы вещества*: атомы, молекулы, элементарные ячейки кристаллов, ядра и элементарные частицы. Они образуют так называемый *микромир* (или *квантовые системы*), которому присущи весьма своеобразные законы движения, изучаемые в специальном разделе физики — *квантовой механике*. Эти законы существенно отличаются от законов *классической механики*, описывающих механическое движение в классической физике. Ряд эффектов (сверхпроводимость, сверхтекучесть, ферромагнетизм), а также физико-химические свойства веществ можно объяснить количественно только в рамках квантовой механики.

### 1.1. Предпосылки возникновения квантовой теории

К началу XX в. была создана физическая картина мира, базирующаяся на механике Ньютона и электродинамике Максвелла. Однако ряд фактов не получил объяснения в рамках данной концепции.

Первая проблема возникла при исследовании излучения, испускаемого нагретыми телами (излучение «черного тела»). Энергия теплового излучения, вычисляемая в классической электродинамике по формуле

$$E = \int_0^\infty \rho(\omega) d\omega, \quad (1.1)$$

содержит спектральную плотность энергии  $\rho(\omega)$  ( $\omega$  — круговая частота), имеющую неправильное асимптотическое поведение при больших частотах:

$$\rho(\omega) = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} kT \quad (1.2)$$

(формула *Рэля – Джинса*). Здесь  $V$  — заполняемый излучением объем,  $T$  — температура,  $k$  — постоянная Больцмана. При  $\omega \rightarrow \infty$  плотность (1.2) квадратично возрастает, приводя к расходимости интегра-

ла (1.1) — так называемая «*ультрафиолетовая катастрофа*» (УФК) в классической электродинамике.

Вторая проблема возникла после того, как Э. Резерфорд предложил планетарную модель атома. Электрон при *всегда ускоренном* движении по атомной орбите (центростремительное ускорение!) должен был бы непрерывно *излучать* электромагнитные волны, т. е. *терять свою энергию*. В конечном итоге, в соответствии с законами механики и электродинамики, электрон упал бы на поверхность ядра (в течение  $\sim 10^{-10}$  с). В реальности же *атом устойчив* и, более того, невозбужденные атомы существуют практически бесконечно долго. Необъяснимыми в рамках классической физики остаются также связь между *электрически нейтральными* атомами в молекулах и физико-химические свойства различных веществ. Наконец, анализ рассеяния электронов на атомах позволил обнаружить загадочную дискретность (*квантование*) атомных уровней энергии (опыт Франка – Герца, 1914 г.), а позже была установлена и дискретность значений орбитального момента атома (опыт Штерна – Герлаха, 1922 г.).

Для решения проблемы УФК М. Планк в 1900 г. выдвинул *гипотезу о квантах*, согласно которой обмен энергией между электромагнитным излучением и веществом (стенками сосуда) происходит дискретными порциями, или квантами (позже их называли *фотонами*), подобно *частицам*, а не волнам (дуализм «волна-частица» для света). Энергия  $E$  фотонов, согласно Планку, связана с частотой  $\omega$  излучения прямой пропорциональной зависимостью:

$$E = \hbar\omega.$$

Коэффициент пропорциональности  $\hbar$ , названный впоследствии *постоянной Планка*, имеет размерность действия и явился новой *фундаментальной физической константой*, специфической для микромира. Для получения согласующегося с опытом распределения энергии в спектре теплового излучения М. Планк был вынужден сделать предположение о наличии в стенках сосуда микроскопических осцилляторов, через посредство которых осуществляется взаимодействие фотонов со стенками. В результате такого предположения им была получена знаменитая формула для спектральной плотности  $\rho(\omega)$  равновесного (теплового) излучения:

$$\rho(\omega) = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \omega^3 \left[ e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right]^{-1} \quad (1.3)$$

(формула Планка). Легко увидеть, что при низких частотах ( $\hbar\omega \ll kT$ ) она переходит в формулу Рэлея – Джинса (1.2).

Гипотеза Планка получила дальнейшее развитие при объяснении явлений *фотоэффекта* и эффекта *Комптона*. В 1905 г. А. Эйнштейн,

развивая гипотезу Планка, предположил, что дискретность возникает не только при обмене энергией между излучением и веществом. По Эйнштейну, всякую электромагнитную волну с волновым вектором  $\mathbf{k}$  ( $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda = 2\pi c/\omega$  — длина волны) во многих явлениях можно рассматривать как совокупность *частиц* (фотонов) с энергией  $E = \hbar\omega$  и импульсом  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ . В частности, это предположение позволило ему объяснить в фотоэффекте наблюдаемую зависимость энергии фотоэлектрона от *частоты*, а не *интенсивности* света. В 1922 г. А. Комптоном было открыто и объяснено с точки зрения гипотезы о фотонах увеличение длины волны рентгеновского излучения при его рассеянии на электронах. (Напомним, что в классической электродинамике частота электромагнитной волны не меняется при взаимодействии с заряженными частицами).

Таким образом, гениальность гипотезы Планка состоит в том, что, как выяснилось, законы взаимодействия света с веществом могут быть объяснены *только благодаря дуализму* «волна–частица» для света. Причиной же «ультрафиолетовой катастрофы» как раз и являлось *игнорирование корпускулярных свойств света*.

Чтобы учесть дискретность атомных энергий, Н. Бору в 1913 г. пришлось ввести ряд постулатов. *Первый* постулат устанавливал существование у атома «стационарных» состояний, находясь в которых он не излучает свет, несмотря на ускоренное движение электрона по орбите. *Второй* постулат устанавливал кратность величины орбитального момента электрона в атоме водорода постоянной Планка  $\hbar$ . *Третий* постулат базировался на гипотезе Планка: при внешних воздействиях атом переходит из одного состояния в другое, испуская или поглощая *квант* света с энергией  $\hbar\omega$ , равной разности между уровнями энергии атома. Опыты Франка – Герца (1914 г.) и Штерна – Герлаха (1922 г.) в какой-то мере подтвердили данные постулаты. Последние позволили также верно воспроизвести энергетический спектр атома *водорода* — простейшей атомной системы, однако уже для атома гелия данная техника оказалась совершенно непригодной. Таким образом, *проблема существования дискретных уровней энергии атома тоже решается не полностью в рамках механики Ньютона*, пусть и дополненной новыми постулатами. Причиной неудач в решении проблем атомной физики является то, что постулаты Бора вводились *ad hoc*, т. е. «задним числом», для корректировки существующей теории. Отметим, что такой же гипотезой *ad hoc* было и предположение Планка о наличии микроскопических осцилляторов в нагретом теле при исследовании равновесного излучения. *Требовался переход к новой концепции механического движения применительно к микромиру*. Такой переход осуществился в течение первой четверти XX века.