Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Кафедра теоретической информатики

В. С. Рублев

Булевы функции

(*индивидуальные работы № 4 и 5 по дисциплине «Основы дискретной математики»*)

Методические указания

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по
специальности Информационные технологии

Ярославль 2009

УДК 519.2
ББК В181я73
Р82

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2009 года

Рецензент
кафедра теоретической информатики Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

Рублев, В. С. Булевы функции: методические указания
Р82 / В. С. Рублев; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2009.
– 48 с.

Методические указания содержат варианты индивидуальных заданий по теме “Булевы функции” дисциплины “Основы дискретной математики”, а также необходимый материал для ее самостоятельного изучения и выполнения индивидуальных заданий. Для качественного усвоения курса в издании даны подробные определения, примеры, иллюстрации и обоснования.

Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 010400 Информационные технологии (дисциплина “Основы дискретной математики”, блок ЕН), очной формы обучения.

УДК 519.2
ББК В181я73

1 Булевы функции

Самые простые дискретные функции – это функции, аргументы которых имеют наименьшее число различных значений и которые также имеют наименьшее число значений. Это наименьшее число значений равно двум, так как функция, у которой только одно значение – константная, а потому мало интересна, а если аргумент имеет только одно значение, то функция фактически не зависит от такого аргумента (значение ее не изменяется).

Так как безразлично, какие обозначения выбирать в качестве значений аргумента или функции (всегда можно переобозначить), то мы для дальнейшего выберем в качестве таких значений 0 и 1. Таким образом, простейшие дискретные функции с n аргументами действуют из прямого произведения $\{0,1\}^n$ на множество $\{0{,}1\}$. Впервые их стал изучать английский математик и логик Джон Буль – создатель формальной логики, и они названы булевыми по его имени.

Самые простые булевы функции имеют 1 аргумент. Таблица каждой такой функции состоит из двух строк, в каждой из которых дается значение функции в зависимости от значения аргумента. Например, таблица некоторой булевой булевой функции $f(x)$ может выглядеть следующим образом:

x	$f(x)$
0	1
1	0

Так как в такой таблице булева функция может принимать при каждом значении аргумента только 1 из 2 значений, то число различных булевых функций с 1 аргументом определяется как размещение с повторением из 2 (значений аргумента) по 2 (значения функции), т. е. имеется $2^2 = 4$ различных функции.

Выпишем табличное задание для всех 4-х функций 1 аргумента:

x	$f_1(x) = 0$	$f_2(x) = x$	$f_3(x) = \overline{x}$	$f_4(x) = 1$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функции f_1 и f_4 принимают константные значения соответственно 0 и 1 и называются *тождественный 0* и *тождественная 1*. Функция f_2

принимает значение аргумента и называется *тождественной* функцией, а функция f_3 принимает значение, противоположное аргументу (1 для 0 и 0 для 1), и называется *отрицанием.*

Число различных булевых функций с n аргументами можно подсчитать следующим образом:

1. Во-первых, число различных наборов аргументов определяется как число элементов прямого произведения $|\{0,1\}^n| = 2^n$.
2. Во-вторых, каждая функция определяется как вектор из 2^n нулей и единиц.

А потому число различных булевых функций с n аргументами определяется как число размещений с повторениями 2 элементов (значений функции) на 2^n местах и равно 2^{2^n}. Для $n = 1$ это число $2^2 = 4$ мы уже нашли. Для $n = 2$ это число равно $2^{2^2} = 2^4 = 16$. Для $n = 3$ оно равно $2^{2^3} = 256$, а для $n = 4$ это число $2^{16} = 65576$, и далее оно растет очень быстро (сверхэкспонента). Но мы увидим в дальнейшем, что для описания любой булевой функции с любым числом аргументов вполне достаточно описать такие функции с двумя аргументами и использовать суперпозиции таких функций.

Наибольшее использование булевы функции нашли в операциях формальной логики высказываний [1], а потому мы их введем для описания операций над высказываниями.

2 Высказывания и операции над ними

Под *высказыванием* понимается любое повествовательное предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно *истинно* или оно *ложно.* Например, утверждение «$2 \times 2 = 4$» является истинным высказыванием, а утверждение «Земля вращается вокруг Марса» является ложным высказыванием. Предложение «Как хорошо!» не является высказыванием (кому хорошо, а кому не очень). Также не является высказыванием предложение «Сегодня хорошая погода», так как оно носит субъективный характер, и потому об истинности его ничего сказать нельзя. Не является высказыванием и вопросительное предложение «Все ли студенты пришли на лекцию?».

[1] Дж. Буль создавал их как раз для описания формальной логики

ŋddqɏeɎ bƗ dədƗbɎɜə d ɛɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

Для высказывания вводится истинностное значение, которое в различных системах описания по разному обозначается. Наиболее частыми обозначениями являются следующие:

- *true* для обозначения истинного высказывания и *false* для обозначения ложного высказывания;
- T и F – аналогично;
- *И* и *Л* – аналогично;
- 1 для обозначения истинного высказывания и 0 для обозначения ложного высказывания.

Мы будем использовать последнее обозначение 1 и 0, которые и ввел Дж. Буль.

Из простых высказываний можно получать более сложные высказывания, соединяя их различными союзами или условными предложениями. Один из самых простых способов – из высказывания x получить его *отрицание*, т. е. высказывание *не* x. Оно истинно тогда и только тогда, когда ложно исходное высказывание x. Операция отрицания является унарной. Для ее обозначения используется знак $\neg$ перед высказыванием либо знак $^{-}$ (черты) над высказыванием. Мы будем использовать последний. Например, $\overline{x < 1}$ означает высказывание «*неверно, что x меньше 1*», которое можно записать и без операции отрицания как $x \geq 1$.

В языке программирования C^{++} для отрицания используется восклицательный знак ! перед высказыванием.

Приведем таблицу истинности для операции отрицания:

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Примером использования отрицания для множеств является $\overline{x \in A}$, что означает $x \notin A$ или $x \in \overline{A}$. Такое обозначение отрицания похоже на обозначение операции дополнения для множеств, и далее мы увидим тесную связь между этими операцией отрицания для высказываний и операцией дополнения для множества.