

1. ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА, РЕШАЕМЫЕ МЕТОДАМИ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Никакая из современных наук не в состоянии охватить бесконечное многообразие свойств и связей, присущих любому телу или явлению. Поэтому для получения эффективных результатов каждая из наук вынуждена принимать ряд гипотез, допущений, которые акцентируют одни свойства и отвергают другие. В результате объектом изучения становится не само реальное тело, а его приближенная модель.

Сопротивление материалов - это наука об инженерных методах расчета на прочность, жесткость и устойчивость наиболее употребительных конструктивных элементов, в первую очередь элементов, имеющих форму бруса. Для сопротивления материалов характерны привлечение большого числа гипотез, более элементарный теоретический аппарат, а главное - практическая эффективность методики доведения решений, по возможности, до расчетных формул, пригодных для непосредственного использования в повседневной практике конструирования сооружений и машин.

Исходя из основных гипотез (о свойствах материала, об его идеальной упругости и естественной ненапряженности), можно в принципе получить способы для вычисления напряжений и деформаций в любом теле. Однако в подавляющем большинстве случаев для этого необходимо использовать весьма сложный и громоздкий математический аппарат, что иногда приводит к непреодолимым в настоящее время затруднениям. Поэтому для получения относительно простых формул и методов расчета, пригодных для широкого применения в практике, приходится принимать дополнительные предположения и допущения.

Однако существует целый ряд задач механики твердого деформируемого тела, которые не удается решить методами сопротивления материалов, например определить напряжения в зоне концентраторов - резких переходов в поперечных сечениях брусьев, отверстий, выкружек, канавок, надрезов и т. п. В этих зонах наиболее часто используют решения теории упругости¹.

Проектирование и производство изделий машиностроения становится всё более автоматизированным с основополагающим участием ЭВМ. При проектировании с помощью ЭВМ создаются математические модели изделий, их машинный образ, которые служат основой разработки технологии и производства на станках с программным управлением.

Содержание курса сопротивления материалов непрерывно изменяется в связи с развитием техники. Если раньше преобладали вопросы прочности строительных конструкций, то в последние десятилетия на первое место выходят проблемы прочности, динамики, жесткости и устойчивости объектов машиностроения, турбостроения, авиационной и космической техники и др. Идет быстрый процесс математизации инженерных знаний. В сопротивлении материалов все большее место занимают методы, которые применялись лишь в дисциплинах математического характера. Это стало возможным благодаря возрастающему влиянию ЭВМ и созданию на основе их применения математических моделей прочностной надежности элементов конструкций².

Целью настоящего задания является исследование с помощью программных продуктов SCAD, MSC.Patran-Nastran – 2005 особенностей распределения напряжений в пластинах, нагруженных в их срединной плоскости, в зонах, где гипотезы сопротивления материалов несправедливы и требуется применять аппарат теории упругости³.

¹ Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений. – М.: Мир, 1977. -302 с.

² Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. - 560 с.

³ Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа, 1961. – 538 с.

Тимошенко С.П. Теория упругости. Л.-М.: Гл. ред. технико-теор. лит-ры, 1937.- 452 с. и более поздние издания.

1.1. РАБОЧИЕ ГИПОТЕЗЫ, ПРИНИМАЕМЫЕ В ТЕОРИИ ИЗГИБА БРУСЬЕВ⁴

В курсе сопротивления материалов в теории изгиба брусьев принимаются следующие рабочие гипотезы.

- 1. Сечения, плоские и нормальные к оси бруса до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси бруса и после его деформации** (гипотеза Якова Бернулли). Гипотеза будет справедлива, если в поперечных сечениях бруса касательные напряжения отсутствуют. Поэтому она справедлива только при чистом изгибе бруса, но эта гипотеза применяется и при поперечном изгибе.
- 2. Продольные волокна бруса не давят друг на друга.** При чистом изгибе это предположение является строгим, при поперечном изгибе – приближенным. Из этой гипотезы следует, что нормальные напряжения в горизонтальных площадках отсутствуют (если нормалью к таким площадкам является ось z , то напряжения $\sigma_z = 0$).

Введенные гипотезы позволяют получить для плоского поперечного изгиба бруса простые формулы для нормальных σ_x и касательных τ_{xy} напряжений в поперечных сечениях:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z; \quad \tau_{xy} = \frac{QS_{н.о.}}{bJ_y},$$

где M_y - изгибающий момент в поперечном сечении бруса относительно оси y ; J_y - осевой момент инерции относительно оси y ; z - текущая координата, определяющая точку поперечного сечения, в которой вычисляются напряжения; Q - поперечная сила в сечении; $S_{н.о.}$ - статический момент отсеченной части площади, лежащей выше или ниже точки с координатой z ; b - ширина поперечного сечения на уровне z .

В соответствии с приведенными формулами нормальные напряжения σ_x в поперечных сечениях бруса распределяются по линейному закону, касательные напряжения τ_{xy} – по параболическому.

3. Принцип Сен-Венана⁵. В точках сплошного тела, достаточно удалённых от мест приложения локальных нагрузок, напряжения мало зависят от распределения этих нагрузок и определяются лишь величиной их статических эквивалентов (сил и моментов).

Распределение напряжений и деформаций для внутренних точек тела при достаточном удалении их от границ тела слабо зависит от характера распределения внешней нагрузки на границах тела. Таким образом, если на некоторой части поверхности тела изменить закон распределения внешней нагрузки так, что видоизменённая нагрузка будет статически эквивалентна прежней, то такое изменение приведет лишь к изменению напряжённого и деформированного состояния в области тела, прилегающей к нагруженному участку, т. е. местных напряжений. Напряжённое и деформированное состояние тела вдали от места нагружения при этом почти не изменяется.

Примером использования принципа Сен-Венана может служить задача о растяжении бруса силами, приложенными к его торцам. В этом случае закон распределения напряжений по сечению бруса на достаточном удалении от торцов не зависит от того, каким образом распределяется приложенная по торцу сечения нагрузка,

⁴ Писаренко Г.С., Агарев В.А., Квитка А.Л., Попков В.Г., Уманский Э.С.. Курс сопротивления материалов. Киев: АН УССР, 1964. – 468 с.

Никифоров С.Н.. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1966. – 584 с.

⁵ Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности.- М.: Высш. шк., 1990.- 400 с.

лишь бы величина равнодействующей нагрузки и точки ее приложения не изменялись (рис.1, а, б, в).

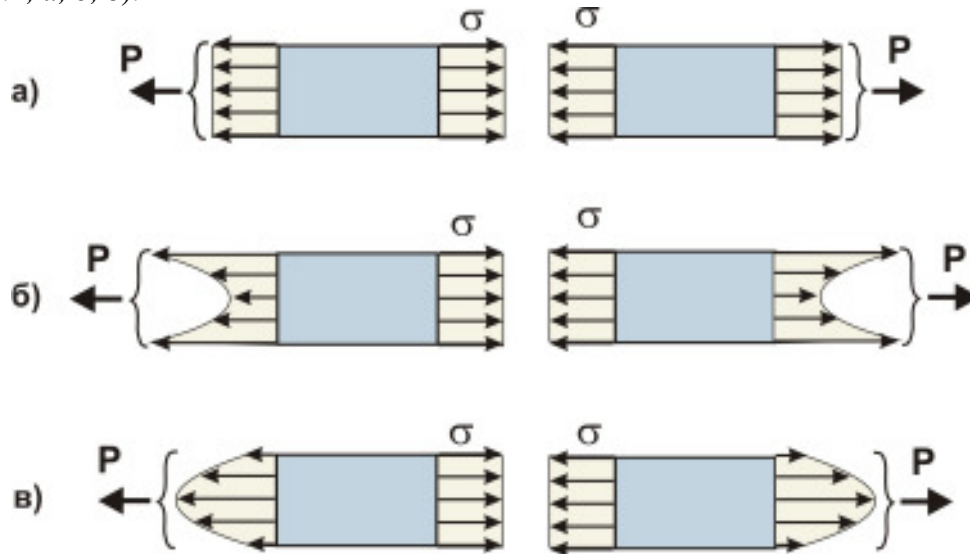


Рис.1

Принцип Сен-Венана имеет большое значение в решении многих задач прикладной механики. Он позволяет при решении некоторых задач удовлетворять граничным условиям не в каждой точке торцового сечения, а лишь в интегральном смысле, т. е. в смысле удовлетворения условиям статики для тела в целом. Однако в некоторых случаях принцип Сен-Венана неприменим. В тонкостенных конструкциях (пластины, оболочки, тонкостенные стержни) могут иметь место случаи, когда статически эквивалентные изменения внешних нагрузок на торцах тонкостенного стержня приводят не к местным изменениям напряжений и деформаций, а изменяют напряженное и деформированное состояние всего тонкостенного стержня.

1.2. КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ⁶

Поперечные сечения стержня (бруса, пластины) могут меняться по его длине: часто в стержне имеются отверстия, врубki, выемки, выточки, уменьшающие рабочую площадь сечения и носящие название *местных ослаблений*. Например, стержни клепаной фермы имеют отверстия для постановки заклепок, которыми их прикрепляют к узловым фасонным листам. Полную площадь поперечного сечения стержня называют площадью *брутто* $F_{бр}$. Площадь поперечного сечения в ослабленном месте за вычетом части, приходящейся на ослабление, т. е. рабочую площадь в ослабленном сечении, называют площадью *нетто* $F_{нт}$.

Если стержень растянут или сжат силой, постоянной по его длине, то в поперечных сечениях, где площадь уменьшена, напряжение будет больше, чем в неослабленном месте.

В тех случаях, когда на различных участках стержня действуют разные по величине силы, наибольшее напряжение возникает не обязательно в ослабленном сечении.

Обычно в ослабленном сечении определяют среднее (номинальное) напряжение, для чего растягивающую или сжимающую силу делят на площадь сечения нетто:

$$\sigma_n = \frac{P}{F_{нт}}. \quad (1)$$

В действительности в местах ослаблений сечений, вырезов и т. п., а также там, где стыкуются участки стержня, имеющие различные сечения, нормальные напряжения при упругих деформациях распределяются по сечению неравномерно, достигая в отдельных точках

⁶ С.Н. Никифоров. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1966. – с.584 и любые другие учебники по сопротивлению материалов.

весьма значительных величин. Например, методами теории упругости установлено, что в растянутой полосе, имеющей постоянную ширину и ослабленной посредине круглым отверстием, напряжения по поперечному сечению $m-m$, проходящему через центр отверстия, распределяются так, как это показано на эпюре напряжений (рис.2, а). Наибольшие напряжения σ_{max} получаются в точках A и B , расположенных у отверстия. Величина их зависит от отношения диаметра отверстия к ширине полосы. При небольшом диаметре они получаются примерно в три раза больше средних напряжений, вычисленных для этого сечения по формуле (1).

В случае растяжения полосы, ослабленной с боков двумя вырезами, например выкружками, наблюдается значительное повышение напряжений у краев этих вырезов (рис.2, б). Величина наибольших напряжений зависит от формы и глубины вырезов.

Напряжения значительно повышаются также у мест резкого изменения формы и размеров поперечного сечения (рис.2, в). Неравномерность в распределении напряжений тем больше, чем более резко изменяется сечение.

Явление возрастания напряжений в местах изменения размеров и формы сечений, у краев отверстий и вырезов, в местах повреждения поверхности деформируемого тела и т. п. называют *концентрацией напряжений*. Перечисленные факторы, вблизи которых возникает это явление, называют *концентраторами напряжений* или *факторами концентраций напряжений*. Концентрация напряжений распространяется на весьма незначительную область сечения и потому напряжения, возникающие в зонах концентрации, называют *местными напряжениями*.

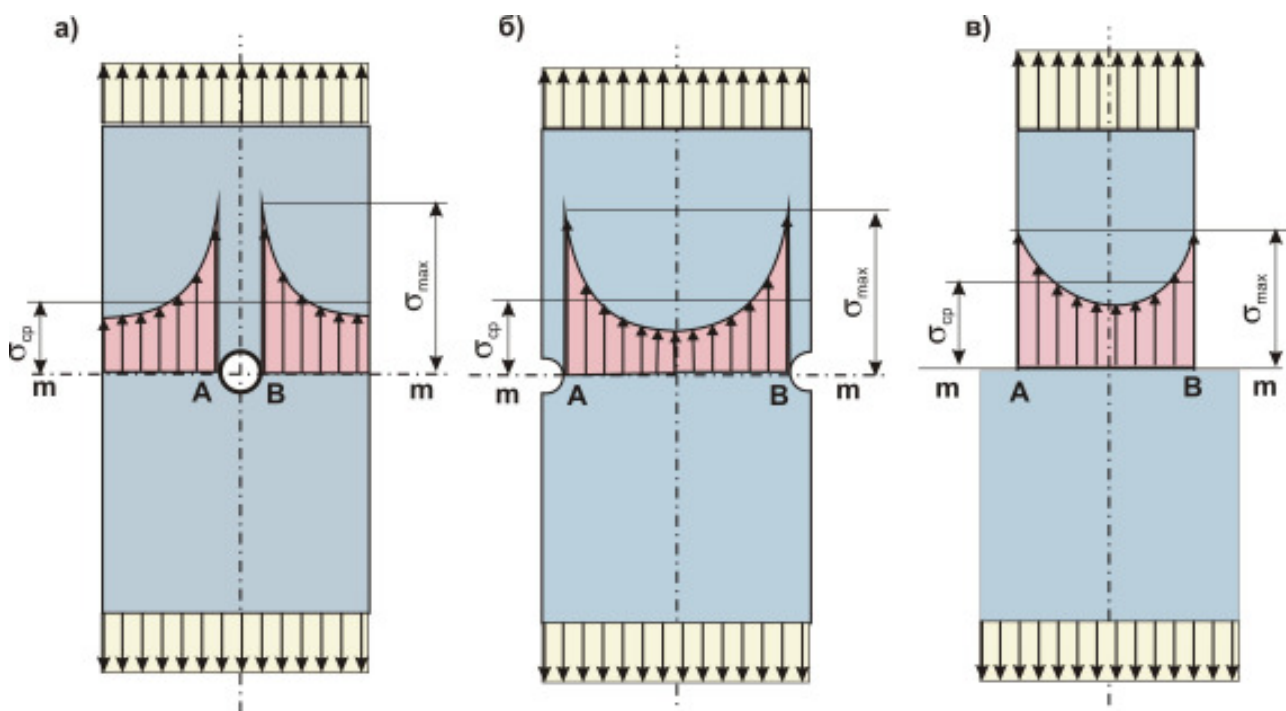


Рис.2

Для оценки максимальных напряжений в зоне концентрации вводятся понятия номинального напряжения и коэффициента концентрации.

Номинальным напряжением называется напряжение, вычисленное без учета концентрации в сечении, ослабленном концентратором (формула 1).

Коэффициентом концентрации напряжений называется отношение наибольшего местного напряжения в зоне концентрации к номинальному напряжению:

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}. \quad (2)$$

Этот коэффициент называется *теоретическим* коэффициентом концентрации напряжений, так как определяется для различных концентраторов теоретически, методами теории упругости для однородного идеально упругого материала. Величина теоретического коэффициента концентрации напряжений может достигать двух, трех и более.

Для реальных материалов коэффициент концентрации напряжений обычно несколько меньше теоретического. Он называется *эффективным* коэффициентом концентрации напряжений и обозначается через β .

Эффективные коэффициенты концентрации напряжений определяются опытным путем как отношение предела прочности материала образца без концентратора напряжений к пределу прочности образца материала с концентратором напряжений $(\sigma_B)_k$, т. е.

$$\beta = \frac{\sigma_B}{(\sigma_B)_k}. \quad (3)$$

Данные об эффективных коэффициентах концентрации напряжений приводятся в справочной литературе.

При отсутствии таких данных при расчетах на прочность используются теоретические коэффициенты.

Концентрация напряжений по-разному влияет на работу деталей из пластичных и хрупких материалов. Если материал достаточно пластичен, имеет площадку текучести, то когда наибольшие местные напряжения достигнут предела текучести, их дальнейший рост временно приостановится, а в остальных точках сечения напряжения будут расти, пока всюду не достигнут предела текучести. Таким образом произойдет выравнивание напряжений; *поэтому при расчетах на прочность пластичных материалов при статических нагрузках концентрацию напряжений не учитывают и расчет ведут по номинальным напряжениям.*

В случае же хрупких материалов, таких, например, как закаленная сталь, чугун и другие, выравнивания напряжений не происходит, и при их росте разрушение начинается в местах наибольших местных напряжений, когда они достигают предела прочности. *Расчет на прочность хрупких материалов нужно вести по наибольшим местным напряжениям, т. е. с учетом концентрации, напряжений.*

Определив путем расчета номинальное напряжение при известном коэффициенте концентрации напряжений для данного концентратора, находят максимальное напряжение в месте концентрации по формуле

$$\sigma_{max} = \beta \sigma_n. \quad (3)$$

Это напряжение должно удовлетворять условию прочности.

Серый чугун, являющийся хрупким материалом, нечувствителен к концентрации напряжений, вызванной внешними концентраторами. Это объясняется крупнозернистой структурой чугуна, в котором графитовые включения создают повсеместно очаги концентрации напряжений, и дополнительные внешние концентраторы не вносят существенных изменений в распределение напряжений.

При динамических нагрузках выравнивание напряжений не успевает произойти даже в пластичных материалах, поэтому концентрацию напряжений нужно учитывать.

У хрупких материалов (чугун, твердые стали и др.) или когда материал находится в хрупком состоянии (при ударных нагрузках или низких температурах), выравнивания напряжений не происходит, и резкое их повышение у мест концентрации может привести к появлению трещин, поэтому учет концентрации напряжений является обязательным.

При конструировании деталей следует, по возможности, избегать в них резких изменений поперечных сечений, канавок, отверстий и других концентраторов напряжений. Особенно это важно для высокопрочных сталей, подвергающихся закалке, и деталей, работающих при динамических нагрузках.