

А. Р. Рязановский

# **Математика.**

## **Подготовка к ОГЭ и ЕГЭ**

**Арифметика, алгебра, начала математического анализа.  
Очерки по истории математики с древнейших времён**

Русский Фонд Содействия Образованию и Науке

Москва 2015

УДК 373.167.1:51(079)  
ББК 22.1я72  
Р99

Печатается по решению Ученого совета  
Университета Дмитрия Пожарского

**Р99 А. Р. Рязановский. Математика. Подготовка к ОГЭ и ЕГЭ. Арифметика, алгебра, начала математического анализа. Очерки по истории математики с древнейших времён.** — М.: Русский Фонд Содействия Образованию и Науке, 2015. — 832 с.

ISBN 978-5-91244-076-2

Эта книга предназначена в первую очередь для школьников и абитуриентов. Она поможет им глубже понять курс школьной математики, подготовиться к сдаче Государственных экзаменов ОГЭ и ЕГЭ. Данная книга может быть полезна и студентам педагогических вузов, обучающихся по программе бакалавриата или магистратуры. Она поможет будущим бакалаврам и магистрам подробнее ознакомиться с методикой преподавания многих разделов школьного курса математики. Эта книга может быть полезной и родителям, желающим помочь своим детям овладеть школьной математикой.

От множества книг и учебников по математике представляемая монография отличается тем, что в ней обстоятельно изложены и справочные сведения, необходимые при изучении школьного курса математики, а также даны детальные объяснения наиболее сложных и, как правило, не достаточно подробно разъясняемых на страницах школьных учебников понятий и методов решения задач.

© А. Р. Рязановский  
© Русский Фонд Содействия Образованию и Науке, 2015

ISBN 978-5-91244-076-2

## От автора

Настоящая книга предназначена для школьников, абитуриентов, студентов педагогических вузов, начинающих учителей, а также для родителей учеников, желающих помочь своим детям выполнять домашние задания по математике и разобраться в теоретическом материале. Книга содержит около 300 статей, в которых разобраны более 1000 задач по всем разделам математики, изучаемых как в обычных общеобразовательных классах, так и в классах с углублённым изучением математики. Внимательное изучение содержания отдельных статей поможет без помощи преподавателя организовать планомерное повторение материала — не только основных понятий и положений теории, но и основных методов решения задач. Язык книги и стиль изложения материала выбирались так, чтобы они были похожи на язык и стиль учителя, объясняющего новую тему на уроке в школе. Некоторые статьи книги содержат материал, который по тем или иным причинам не вошёл в школьные учебники и руководства по решению задач.

В книге восемь разделов: «I. Числа», «II. Алгебраические выражения и многочлены», «III. Уравнения, системы, совокупности», «IV. Неравенства», «V. Функции и графики», «VI. Элементы математического анализа», «VII. Числовые последовательности. Прогрессии», а также «Исторические очерки развития математики», которые написаны ведущим сотрудником Института истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН, кандидатом физико-математических наук **Евгением Алексеевичем Зайцевым**.

Каждый раздел содержит достаточно подробные статьи, которые посвящены конкретному математическому понятию, вынесенному в заголовок. Статьи внутри разделов расположены не в алфавитном порядке. При их расположении мы придерживались правила: «от простого — к более сложному», т. е. первые статьи разделов относятся к основным простейшим понятиям, а последующие — к более сложным. Это же правило определило уровень изложения внутри статьи, который не остаётся постоянным. Начало большинства статей справочника содержит поясняющий и иллюстративный материал, затем приведена строгая формулировка понятия и разобраны основные типы задач, которые, по мере возможности, систематизированы по методам их решения. Для удобства пользования пособие снабжено подробным предметным указателем. Наиболее важный материал выделен курсивом. Особое внимание следует обратить на замечания, которые даны в виде практических советов.

Книга, которую Вы держите в руках, не является учебником. Она не заменяет его, а служит полезным дополнением к школьным учебникам, руководством к теории и практике решения задач, которое может помочь школьнику вспомнить, повторить, понять основные разделы курса школьной математики, а также познакомиться с теми из них, которые рассматриваются на дополнительных факультативных занятиях и занятиях математических кружков.

Несколько рекомендаций по работе с книгой. Каждая её статья обозначена двумя номерами. Первый — это номер раздела, а второй — это номер статьи в данном разделе; например, п. 3.36 означает 36-ю статью в разделе 3. Иногда внутри статьи указаны ссылки на другие статьи книги, которые следует прочитать для лучшего понимания основной статьи. Чтобы найти то или иное интересующее вас математическое понятие, следует пользоваться предметным указателем.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность профессору, кандидату физико-математических наук, доктору философских наук **С. Н. Бычкову**, а также заслуженному учителю России, учителю московской гимназии № 1567 **Л. И. Звавичу** за ряд высказанных ими ценных советов и предложений.

Декабрь 2010.

*А. Р. Рязановский*

# Содержание

От автора . . . . .	3
---------------------	---

## Раздел I. Числа

1.1. Целые числа . . . . .	5
1.2. Цифры. Системы счисления . . . . .	14
1.3. Факториал . . . . .	17
1.4. Делимость чисел . . . . .	21
1.5. Простые числа . . . . .	24
1.6. Решето Эратосфена . . . . .	28
1.7. Основная теорема арифметики . . . . .	28
1.8. Наибольший общий делитель . . . . .	31
1.9. Наименьшее общее кратное . . . . .	35
1.10. Деление с остатком . . . . .	37
1.11. Алгоритм Евклида . . . . .	39
1.12. Признаки делимости . . . . .	41
1.13. Суммирование чисел натурального ряда . . . . .	45
1.14. Неопределенное уравнение . . . . .	47
1.15. Линейное уравнение в целых числах . . . . .	48
1.16. Обыкновенная дробь . . . . .	57
1.17. Основное свойство дроби . . . . .	60
1.18. Сократимая дробь . . . . .	62
1.19. Сравнение обыкновенных дробей . . . . .	64
1.20. Обратные числа . . . . .	68
1.21. Непрерывные дроби . . . . .	70
1.22. Именованные числа . . . . .	78
1.23. Десятичные дроби . . . . .	82
1.24. Обращение десятичной дроби в обыкновенную и обращение обыкновенной дроби в десятичную . . . . .	84
1.25. Периодические десятичные дроби . . . . .	85
1.26. Виды периодических десятичных дробей и длина их периода . . . . .	87
1.27. Обращение периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь . . . . .	90
1.28. Действия с периодическими дробями . . . . .	92
1.29. Периодические дроби с периодом 0 и с периодом 9 . . . . .	93
1.30. Рациональные числа . . . . .	93
1.31. Соизмеримые и несоизмеримые отрезки . . . . .	95
1.32. Иррациональные числа . . . . .	99
1.33. Модуль (абсолютная величина) числа . . . . .	103
1.34. Приближенное значение величины. Абсолютная и относительная погрешности . . . . .	107
1.35. Возведение в степень . . . . .	112
1.36. Извлечение корня . . . . .	115
1.37. Приближенные методы извлечения корня . . . . .	117

1.38. Логарифмирование . . . . .	121
----------------------------------	-----

## Раздел II. Алгебраические выражения и многочлены

2.1. Буквенные выражения . . . . .	125
2.2. Алгебраические выражения . . . . .	133
2.3. Противоположные выражения. Обратные выражения . . . . .	134
2.4. Неалгебраические (трансцендентные) выражения . . . . .	136
2.5. Тождество . . . . .	137
2.6. Основные алгебраические формулы . . . . .	137
2.7. Преобразование целых выражений . . . . .	144
2.8. Преобразование дробно-рациональных выражений . . . . .	147
2.9. Преобразование иррациональных выражений . . . . .	148
2.10. Основные тригонометрические формулы . . . . .	150
2.11. Преобразование тригонометрических выражений . . . . .	154
2.12. Логарифмирование . . . . .	163
2.13. Преобразование выражений, содержащих логарифмы . . . . .	166
2.14. Многочлены. Одночлены . . . . .	172
2.15. Степень одночлена . . . . .	172
2.16. Стандартный вид одночлена . . . . .	172
2.17. Подобные одночлены . . . . .	173
2.18. Многочлены . . . . .	173
2.19. Степень многочлена . . . . .	174
2.20. Стандартный вид многочлена . . . . .	174
2.21. Операции с многочленами . . . . .	175
2.22. Однородные многочлены . . . . .	176
2.23. Симметрические многочлены . . . . .	180
2.24. Многочлены с одним неизвестным . . . . .	181
2.25. Сложение и вычитание многочленов . . . . .	183
2.26. Умножение многочленов . . . . .	184
2.27. Деление многочленов . . . . .	184
2.28. Деление многочленов с остатком . . . . .	185
2.29. Деление многочленов «уголком» . . . . .	186
2.30. Деление многочленов методом неопределённых коэффициентов . . . . .	188
2.31. Наибольший общий делитель двух многочленов . . . . .	190
2.32. Взаимно простые многочлены . . . . .	193
2.33. Наименьшее общее кратное двух многочленов . . . . .	195
2.34. Теорема Безу . . . . .	196
2.35. Схема Горнера . . . . .	198
2.36. Корни многочлена . . . . .	201
2.37. Кратные корни многочлена . . . . .	203
2.38. Разложение многочлена на множители . . . . .	205
2.39. Теорема Виета для квадратного трёхчлена . . . . .	206
2.40. Теорема обратная теореме Виета . . . . .	209
2.41. Теорема Виета для произвольного многочлена . . . . .	214

2.42. Эскиз графика многочлена . . . . .	215
--	-----

### Раздел III. Уравнения, системы, совокупности

3.1. Числовые равенства . . . . .	218
3.2. Уравнения . . . . .	219
3.3. Корень уравнения . . . . .	220
3.4. Уравнения с параметрами . . . . .	222
3.5. Равносильные уравнения . . . . .	224
3.6. Уравнение-следствие . . . . .	229
3.7. Системы уравнений . . . . .	231
3.8. Совокупности уравнений и систем уравнений . . . . .	234
3.9. Алгебраическое уравнение первой степени (линейное уравнение) . . . . .	236
3.10. График линейного уравнения с двумя переменными . . . . .	241
3.11. Алгебраическое уравнение второй степени (квадратное уравнение) . . . . .	246
3.12. График уравнения второй степени с двумя переменными . . . . .	249
3.13. Выделение полного квадрата из квадратного трехчлена . . . . .	252
3.14. Квадратные уравнения с двумя переменными . . . . .	257
3.15. Свойства корней квадратного трехчлена (квадратного уравнения) . . . . .	260
3.16. Алгебраические уравнения высших степеней . . . . .	265
3.17. Нахождение рациональных корней многочлена (уравнения) с рациональными коэффициентами . . . . .	266
3.18. Возвратные уравнения . . . . .	270
3.19. Метод приведения к однородному уравнению . . . . .	272
3.20. Использование монотонности функции . . . . .	273
3.21. Метод разложения на множители . . . . .	274
3.22. Уравнение вида $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = q$ . . . . .	276
3.23. Уравнение вида $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = qx^2$ . . . . .	277
3.24. Уравнение вида $(a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2) = qx^2$ . . . . .	280
3.25. Дробно-рациональные уравнения . . . . .	280
3.26. Уравнения, содержащие знак модуля . . . . .	284
3.27. Методы решения иррациональных уравнений . . . . .	302
3.28. Уравнения и неравенства, связанные со степенной функцией . . . . .	307
3.29. Показательные уравнения . . . . .	309
3.30. Логарифмические уравнения . . . . .	315
3.31. Тригонометрические уравнения . . . . .	322
3.32. Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции . . . . .	347
3.33. Графический способ решения уравнений . . . . .	366
3.34. Неопределенное уравнение . . . . .	368
3.35. Линейное уравнение в целых числах . . . . .	369
3.36. Системы линейных алгебраических уравнений . . . . .	379
3.37. Метод подстановки . . . . .	381
3.38. Метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса, формулы Крамера) . . . . .	382

3.39. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными . . . . .	386
3.40. Системы двух линейных уравнений с тремя неизвестными . . . . .	388
3.41. Основные методы решения нелинейных систем алгебраических уравнений . . . . .	390
3.42. Системы иррациональных уравнений . . . . .	400
3.43. Системы тригонометрических уравнений . . . . .	409
3.44. Системы показательных и логарифмических уравнений . . . . .	416
3.45. Графический способ решения систем уравнений . . . . .	425
3.46. Часть числа . . . . .	427
3.47. Процент . . . . .	430
3.48. Задачи на части и проценты . . . . .	433
3.49. Пропорции . . . . .	437
3.50. Прямо и обратно пропорциональные величины . . . . .	442
3.51. Задачи, связанные с прямо и обратно пропорциональными величинами	445
3.52. Задачи на составление уравнений, неравенств и их систем . . . . .	449

#### Раздел IV. Неравенства

4.1. Числовые неравенства . . . . .	461
4.2. Двойное неравенство . . . . .	464
4.3. Неравенства с переменными . . . . .	465
4.4. Равносильные неравенства . . . . .	467
4.5. Неравенство-следствие . . . . .	467
4.6. Системы неравенств с одним неизвестным . . . . .	469
4.7. Совокупности неравенств с одним неизвестным . . . . .	471
4.8. Среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое, среднее квадратичное . . . . .	473
4.9. Линейные неравенства . . . . .	478
4.10. Дробно-рациональные неравенства. Метод интервалов . . . . .	480
4.11. Квадратные неравенства . . . . .	492
4.12. Решение квадратных неравенств графически . . . . .	493
4.13. Неравенства с двумя переменными . . . . .	494
4.14. Неравенства, содержащие знак модуля . . . . .	497
4.15. Методы решения иррациональных неравенств . . . . .	501
4.16. Показательные неравенства . . . . .	510
4.17. Логарифмические неравенства . . . . .	518
4.18. Тригонометрические неравенства . . . . .	529

#### Раздел V. Функции и графики

5.1. Переменные и постоянные величины . . . . .	538
5.2. Числовая функция . . . . .	539
5.3. Способы задания функций . . . . .	541
5.4. График функции . . . . .	548
5.5. Операции над функциями . . . . .	550
5.6. Обратная функция . . . . .	552



5.7. Монотонные и немонотонные функции . . . . .	557
5.8. Чётные и нечётные функции . . . . .	562
5.9. Периодические и непериодические функции . . . . .	564
5.10. Основные элементарные функции. Класс элементарных функций . . . . .	569
5.11. График и свойства линейной функции . . . . .	570
5.12. График квадратичной функции . . . . .	574
5.13. Свойства квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ . . . . .	576
5.14. График и свойства дробно-линейной функции . . . . .	577
5.15. Показательная функция . . . . .	582
5.16. Логарифмическая функция . . . . .	584
5.17. Тригонометрические функции . . . . .	588
5.18. Преобразования графиков функций . . . . .	598

## Раздел VI. Элементы математического анализа

6.1. Окрестность точки . . . . .	601
6.2. Промежутки числовой прямой . . . . .	603
6.3. Предел числовой последовательности . . . . .	604
6.4. Способы вычисления пределов числовых последовательностей . . . . .	607
6.5. Предел монотонной последовательности . . . . .	611
6.6. Число $e$ . . . . .	612
6.7. Предел функции при $x \rightarrow +\infty$ . . . . .	613
6.8. Предел функции при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow \infty$ . . . . .	617
6.9. Предел функции при $x \rightarrow a$ . . . . .	619
6.10. Бесконечно малые и бесконечно большие функции при $x \rightarrow a$ . . . . .	621
6.11. Замечательные пределы . . . . .	623
6.12. Способы нахождения пределов функций при $x \rightarrow a$ . . . . .	624
6.13. Односторонние пределы . . . . .	627
6.14. Функции, непрерывные в точке . . . . .	629
6.15. Односторонняя непрерывность . . . . .	636
6.16. Функции, непрерывные на отрезке . . . . .	637
6.17. Производная . . . . .	643
6.18. Производные основных элементарных функций . . . . .	647
6.19. Правила дифференцирования . . . . .	648
6.20. Задача о проведении касательной к кривой . . . . .	652
6.21. Бесконечные производные и вертикальные касательные . . . . .	656
6.22. Касательная к параболе . . . . .	657
6.23. Касательная к гиперболе . . . . .	659
6.24. Дифференцируемые функции . . . . .	661
6.25. Дифференциал функции . . . . .	662
6.26. Производная как скорость изменения функции . . . . .	664
6.27. Производные высших порядков . . . . .	666
6.28. Экстремум функции . . . . .	668
6.29. Критические точки функции . . . . .	672
6.30. Теорема Ферма . . . . .	674

6.31. Теорема Лагранжа . . . . .	675
6.32. Правило Лопиталья . . . . .	675
6.33. Исследование функции на монотонность с помощью производной . . . . .	678
6.34. Исследование функции на экстремум с помощью производной . . . . .	680
6.35. Наибольшее и наименьшее значения функции . . . . .	682
6.36. Исследование графика функции на выпуклость (вогнутость) с помощью производной . . . . .	684
6.37. Асимптоты . . . . .	688
6.38. Построение графиков с использованием производной . . . . .	692
6.39. Задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значений . . . . .	695
6.40. Доказательство неравенств с помощью производных . . . . .	697
6.41. Первообразная . . . . .	700
6.42. Неопределенный интеграл . . . . .	705
6.43. Методы нахождения первообразных (методы интегрирования) . . . . .	706
6.44. Понятие о дифференциальном уравнении . . . . .	708
6.45. Геометрические и физические задачи на составление дифференциальных уравнений . . . . .	712
6.46. Определенный интеграл . . . . .	714
6.47. Свойства определенного интеграла . . . . .	717
6.48. Интеграл с переменным верхним пределом . . . . .	724
6.49. Геометрические приложения определенного интеграла . . . . .	727

## Раздел VII. Числовые последовательности. Прогрессии

7.1. Числовые последовательности . . . . .	731
7.2. Арифметическая прогрессия . . . . .	733
7.3. Основные свойства арифметической прогрессии . . . . .	734
7.4. Дополнительные свойства арифметической прогрессии . . . . .	736
7.5. Геометрическая прогрессия . . . . .	741
7.6. Основные свойства геометрической прогрессии . . . . .	741
7.7. Дополнительные свойства геометрической прогрессии . . . . .	744

## Раздел VIII. Исторические очерки

8.1. Общие сведения о предмете арифметики . . . . .	747
8.2. Системы счисления . . . . .	749
8.3. Инструментальный счет (абак) . . . . .	753
8.4. Арифметика пифагорейцев . . . . .	755
8.5. Геометрическое представление чисел . . . . .	758
8.6. Теория отношений целых чисел . . . . .	762
8.7. Несоизмеримость стороны и диагонали квадрата . . . . .	764
8.8. Золотое сечение . . . . .	765
8.9. Отрицательные числа . . . . .	766
8.10. Общие сведения о предмете алгебры . . . . .	768
8.11. Шумеро-вавилонская алгебра . . . . .	770
8.12. Геометрическая алгебра древних греков . . . . .	776

8.13. Решение уравнений и символическое исчисление . . . . .	782
8.14. «Ал-джабр» и «ал-мукабала» (арабская алгебра) . . . . .	784
8.15. Развитие алгебры в Европе . . . . .	786
8.16. Представление о предмете математического анализа. Потенциальная и актуальная бесконечность . . . . .	788
8.17. Метод исчерпывания в древнегреческой математике . . . . .	791
8.18. Метод исчерпывания в задаче Архимеда о квадратуре параболы . . .	795
8.19. Метод исчерпывания в задачах Архимеда, приводящий к вычислению интегральных сумм . . . . .	798
8.20. Механический метод Архимеда . . . . .	801
8.21. Использование методов «математического анализа» в средние века .	803
8.22. Использование методов математического анализа в работах Галилея и Кеплера. Принцип Кавальери . . . . .	806
8.23. Метод Ферма в задаче о проведении касательной к кривой. Треугольник Паскаля . . . . .	812
8.24. Основы дифференциального и интегрального исчислений в работах Ньютона и Лейбница . . . . .	815
Именной указатель . . . . .	818

**А. Р. Рязановский**  
**Математика.**

**Подготовка к ОГЭ и ЕГЭ.**

Арифметика, алгебра, начала математического анализа.  
Очерки по истории математики с древнейших времён

Печатается по решению  
Ученого совета Университета Дмитрия Пожарского

Дизайн и верстка: *Е. Г. Иванов*  
Дизайн обложки: *Е. А. Горева*

Подписано в печать 12.01.15. Бумага офсетная, 80 гр.  
Формат 70×100  $\frac{1}{16}$ . Гарнитура «Таймс». Печать офсетная.  
Печ. л. 52,0. Тираж 1000 экз. Заказ №

Русский Фонд Содействия Образованию и Науке.  
119435, Москва, ул. Малая Пироговская, д. 13, стр. 1  
[www.s-and-e.ru](http://www.s-and-e.ru)

Типография «Наука»  
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6