

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова

А. Н. Куликов, Д. А. Куликов

Дифференциальные уравнения.

Теоремы, примеры, задачи

Учебное пособие

Ярославль 2011

ББК В161.6я73
УДК 517.91/93
К90

Учебное издание

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2010-2011 учебного года*

Рецензенты:

доктор тех. наук, профессор Д. О. Бытев;
кафедра математического анализа Ярославского государственного
педагогического университета им. К. Д. Ушинского

Куликов, А. Н. Дифференциальные уравнения. Теоремы, примеры, задачи: учебное пособие/ А. Н. Куликов, Д. А. Куликов;
Яросл. гос. ун.-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2011. – 139 с.
ISBN 978-5-8397-0831-0

В учебном пособии изложены четыре основных раздела курса "Обыкновенные дифференциальные уравнения". Авторы уделили основное внимание практическому освоению материала, умению решать задачи, применять теоремы для исследования тех или иных дифференциальных уравнений. Выбор материала согласован с новыми образовательными стандартами.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальностям: 010100.65 Математика, 010200.65 Прикладная математика и информатика, 090102.65 Компьютерная безопасность, Физика (дисциплина "Дифференциальные уравнения", блок ОПД, очная форма обучения).

Ил. 11. Библиогр.: 13 назв.

ISBN 978-5-8397-0831-0 © Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, 2011

**Куликов Анатолий Николаевич
Куликов Дмитрий Анатольевич**

Дифференциальные уравнения.

Теоремы, примеры, задачи

Учебное пособие

Редактор, корректор М. Э. Левакова
Компьютерная верстка Д. А. Куликов

Подписано в печать 20.09.2011. Формат 60 × 84/16.

Бумага офсетная. Усл. печ. л. 6,0.

Уч.-изд.л. 8,14. Тираж 70 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
редакционно-издательским отделом ЯрГУ.
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.
Отпечатано на ризографе.

Список литературы

1. Петровский, И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. – М.: Наука, 1970.
2. Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – М.: Наука, 1970.
3. Смирнов, В. И. Курс высшей математики / В. И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – Т.2.
4. Эсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эсгольц. – М.: Наука, 1969.
5. Федорюк, М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. В. Федорюк. – М.: Наука, 1980.

Сборники задач

6. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. – М.: Наука, 1967.
7. Самойленко, А. М. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк. – М.: Высшая школа, 1989.
8. Матвеев, Н. М. Сборник задач и упражнений / Н. М. Матвеев. – М.: Высшая школа, 1989.

Дополнительная литература

9. Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М.: Наука, 1967.
10. Арнольд, В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд. – М.: Наука, 1971.
11. Арнольд, В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В. И. Арнольд. – М.: Наука, 1978.
12. Бибииков, Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибииков. – М.: Наука, 1991.
13. Куликов, А. Н. Применение метода инвариантных многообразий в локальных задачах устойчивости и теории колебаний / А. Н. Куликов. – Ярославль: ЯрГУ, 1982.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
----------------	---

Глава 1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Элементарные методы	7
---	----------

1.1. Общие понятия, определения и примеры	7
1.2. Задача Коши	10
1.3. Автономные уравнения	12
1.4. Уравнения с разделяющимися переменными	16
1.5. Однородные уравнения	18
1.6. Линейные уравнения	24
1.7. Уравнения Бернулли и Риккати	27
1.8. Уравнения в полных дифференциалах	30
1.9. Понижение порядка уравнения	32
1.10. Задачи для самостоятельного решения	36

Глава 2. Дифференциальные уравнения высших порядков. Линейные дифференциальные уравнения.....	38
--	-----------

2.1. Дифференциальные уравнения высших порядков	38
2.2. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Общие свойства	41
2.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения	43
2.4. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	47
2.5. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	53
2.6. Уравнение Эйлера	56
2.7. Уравнение Лагранжа	57
2.8. Уравнение Чебышева	57
2.9. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами со специальной правой частью	59
2.10. Метод вариации произвольных постоянных для	

линейных уравнений второго порядка	68
2.11. Метод вариации произвольных постоянных в общем случае	72
2.12. Задачи для самостоятельного решения	74

Глава 3. Системы линейных дифференциальных уравнений

3.1. Определения и основные свойства	76
3.2. Определитель Вронского. Фундаментальная система решений. Структура решений однородной и неоднородной линейных систем	78
3.3. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами	81
3.4. Матричная экспонента	89
3.5. Линейные однородные системы с периодическими коэффициентами	93
3.6. Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами	97
3.7. Задачи для самостоятельного решения	107

Глава 4. Устойчивость

4.1. Основные понятия теории устойчивости решений	108
4.2. Общие теоремы об устойчивости систем дифференциальных уравнений	113
4.3. Метод функций Ляпунова	120
4.4. Теорема об устойчивости по первому приближению	126
4.5. Задачи для самостоятельного решения	132

Примеры контрольных работ.....

Список литературы.....

Вариант 4

1. Для системы $\dot{y} = Ay$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- найти e^{At} ;
- исследовать на устойчивость нулевое решение;
- найти все $\alpha \in R$, при которых нулевое решение системы

$$\dot{y} = By + f(y)$$

асимптотически устойчиво. Здесь $B = A - \beta E$, E – единичная матрица, $f(y) = \text{colon}(y_3^2, y_1^2, y_2^3)$.

2. Найти все $l > 0$, при которых краевая задача

$$y'' + 2y = 2 \cos 2t, \quad y = y(t), \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0, \quad t \in [0, l]$$

- имеет единственное решение;
- имеет бесконечное множество решений;
- не имеет решений.

3. Решить уравнение

$$y'x^3 \sin y + 2y = xy'.$$

4. Найти фундаментальную матрицу уравнения

$$y'' + 4ay' - (4a^2 + 1)y = 0$$

и все a , при которых определитель Вронского стремится к 0, если $x \rightarrow -\infty$.

Вариант 3

1. Для системы $\dot{y} = Ay$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- а) найти e^{At} ;
- б) исследовать на устойчивость нулевое решение;
- с) найти все $\alpha \in R$, при которых нулевое решение системы

$$\dot{y} = By + f(y)$$

асимптотически устойчиво. Здесь $B = A + \alpha E$, E – единичная матрица, $f(y) = (0, y_1 y_2 y_3, y_1 y_3 \sin y_2^2)$.

2. Найти все $l > 0$, при которых краевая задача

$$y'' + 4y = \sin 2t, \quad y = y(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0, \quad t \in [0, l]$$

- а) имеет единственное решение;
- б) имеет бесконечное множество решений;
- с) не имеет решений.

3. Решить уравнение

$$y' + 2y = e^x y^2.$$

4. Найти фундаментальную матрицу уравнения

$$y'' + 4ay' + (4a^2 - 1)y = 0$$

и все a , при которых определитель Вронского стремится к 0, если $x \rightarrow -\infty$.

ВВЕДЕНИЕ

Data aequatione quocunque
fluentes quatuor involvente
fluxiones invenire et vice versa
I. Newton

Данное пособие предназначено студентам тех факультетов (специальностей, направлений), где курс "Обыкновенные дифференциальные уравнения" выделен в отдельную дисциплину (модуль). В Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова к таким относятся все направления математического факультета, большинство направлений факультета информатики и вычислительной техники, физического факультета. Оно не призвано заменить известные учебники и сборники задач, которые традиционно используют при чтении лекций и проведении практических занятий. Авторы надеются, что оно займет свою нишу среди учебников, учебных пособий и задачников, список которых приведен в конце данного издания.

В связи с переходом на двухуровневую систему появились новые федеральные государственные образовательные стандарты. По-видимому, они далеки от завершения и будут не раз пересматриваться, улучшаться, модернизироваться. Но ясно одно: в образовательном процессе должна увеличиваться доля самостоятельной работы студентов. Исходя из данной посылки, авторы попытались включить в пособие те фрагменты курса, которые не всегда можно найти в учебниках. Речь идет о примерах и упражнениях, поясняющих магистральное изложение курса. Такие упражнения и разбор примеров, несомненно, помогут студентам при подготовке к зачетам и экзаменам. В конце пособия приведены примеры зачетных и экзаменационных работ, которые можно использовать, особенно при проведении экзаменов в письменной форме. Письменные экзамены характерны для высших учебных заведений большинства стран, присоединившихся к Болонскому процессу.

Пособие состоит из четырех глав, включающих в себя материал, который является базовой частью курса. Объем пособия не позволяет включить ряд глав курса. Например, краевые задачи, метод малого параметра и т. д. Авторы надеются, что недостающие вопросы войдут в следующую часть аналогичного пособия.