

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Инженерно-технологическая академия

В. Ф. ГУЗИК
Е. В. ЛЯПУНЦОВА
В. И. ШМОЙЛОВ

**СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ
НЕПРЕРЫВНЫМИ ДРОБЯМИ**

Монография

Москва – Ростов-на-Дону – Таганрог
Физматлит – Издательство Южного федерального университета
2019

УДК 517.524

ББК 22.161.5

Г938

Печатается по решению экспертной группы комитета по инженерному направлению науки и образования при ученом совете Южного федерального университета (протокол №7 от 17 апреля 2019 г.)

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор Г. В. Кузовых

доктор технических наук, профессор В. И. Финаев

Гузик, В. Ф.

Г938 Суммирование рядов непрерывными дробями : монография / В. Ф. Гузик, Е. В. Ляпунцова, В. И. Шмойлов. – Москва : Физматлит ; Ростов-на-Дону – Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2019. – 683 с.

ISBN 978-5-9211-1829-4 (Издательство Физматлит)

ISBN 978-5-9275-3207-0 (Издательство ЮФУ)

В книге рассматривается иное, нежели традиционное, определение сходимости непрерывных дробей. Новый метод суммирования используется при определении значений расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей и рядов. Предложен общий подход к построению производящих функций рядов. Рассматриваются операции с комплексными числами, представленными подходящими дробями непрерывных дробей.

В заключительной главе помещены материалы о некоторых российских математиках, внесших значительный вклад в теорию непрерывных дробей.

Книга может быть полезна специалистам, работающим в прикладной и вычислительной математике, а также студентам и аспирантам, обучающимся по этим направлениям.

Работа выполнена при реализации научного проекта в рамках проектной части государственного задания Минобрнауки России № 2.3928.2017/ПЧ.

УДК 517.524

ББК 22.161.5

ISBN 978-5-9211-1829-4 (Издательство Физматлит)

ISBN 978-5-9275-3207-0 (Издательство ЮФУ)

© Физматлит, 2019

© Гузик В. Ф., Ляпунцова Е. В.,
Шмойлов В. И., 2019

© Оформление. Макет. Издательство
Южного федерального университета, 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	23
ГЛАВА 1. НАЧАЛА ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ ...	44
1.1. Обобщённые непрерывные дроби	44
1.2. Цепные дроби	49
1.3. Правильные цепные дроби и некоторые их применения	53
1.4. Некоторые формулы теории цепных дробей	55
1.5. Эквивалентные преобразования цепных дробей	59
1.6. Равноценные цепные дроби	61
1.7. Преобразования сжатия и растяжения цепных дробей	64
1.8. Алгоритмы вычисления значений непрерывных дробей	66
1.9. Некоторые классические теоремы о сходимости цепных дробей	77
1.10. Классификация непрерывных дробей	81
1.11. Формулы Хейлсберга – Стильерса	86
1.12. Формулы Хлопонина	89
1.13. Рекуррентный алгоритм Хлопонина	91
1.14. Алгоритм Вискотатова	92
1.15. Метод Никитина	94
1.16. Рекуррентный алгоритм Рундсхаузера	99
1.17. Построение соответствующего ряда для цепной дроби	102
ГЛАВА 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ	106
2.1. О сходимости цепных дробей	106
2.2. Суммирование непрерывных дробей при помощи r/φ -алгоритма	107
2.3. Определение значений расходящихся цепных дробей	115
2.4. Определение модуля комплексного числа	126
2.5. Определение знака аргумента комплексного числа	133
2.6. Модификация r/φ -алгоритма	142
ГЛАВА 3. СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ, СВЯЗАННЫХ С ДЗЕТА-ФУНКЦИЕЙ РИМАНА	147
3.1. Определение значений расходящихся рядов построением производящих функций	147
3.2. О производящих функциях второго порядка	152

3.3. Примеры построения производящих функций	154
3.4. Суммирование рядов, связанных с функцией $\beta(n)$	167
3.5. Суммирование цепными дробями некоторых расходящихся рядов	175
ГЛАВА 4. СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ, ВКЛЮЧАЮЩИХ ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ	180
4.1. Определение производящих функций для рядов, включающих числа Фибоначчи	180
4.2. Определение производящих функций для рядов с числами Фибоначчи, имеющих нечётные порядковые номера	200
ГЛАВА 5. СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ	213
5.1. Суммирование рядов Фурье	213
5.2. Метод соответствующих цепных дробей	215
5.3. Производящие функции простейших тригонометрических рядов	238
5.4. Определение производящих функций для рядов, содержащих степени синусов нечётных кратных углов	263
5.5. Определение производящих функций для рядов, содержащих степени косинусов кратных углов	275
5.6. Определение производящих функций для рядов, содержащих степени косинусов нечётных кратных углов	285
5.7. Определение производящих функций рядов, содержащих степени гиперболических синусов	291
5.8. Определение производящих функций для рядов, содержащих степени гиперболических синусов нечетных кратных углов ...	301
5.9. Определение производящих функций рядов, содержащих степени гиперболических косинусов	310
5.10. Определение производящих функций для рядов, содержащих степени гиперболических косинусов нечётных кратных углов	320
5.11. Построение производящих функций для рядов, коэффициенты которых являются эллиптические числа	328
5.12. Определение производящих функций для рядов, коэффициенты которых гиперболические числа	333
5.13. О некоторых аспектах метода соответствующих цепных дробей	339
5.14. Построение соответствующих цепных дробей для рядов, включающих простые числа	343

5.15. Конечные соответствующие цепные дроби	358
ГЛАВА 6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ КОНЕЧНЫМИ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ	360
6.1. Алгоритм Евклида	360
6.2. Разложение рациональных чисел в конечные цепные дроби алгоритмом Рутисхаузера	361
6.3. Представление простейших дробей конечными цепными дробями	370
6.4. Метод производящих функций	373
ГЛАВА 7. РАЗЛОЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ В ЦЕПНЫЕ ДРОБИ	377
7.1. Построение соответствующих цепных дробей для тригонометрических рядов	377
7.2. Ускорение сходимости рядов Фурье построением соответствующих цепных дробей	384
ГЛАВА 8. СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ ...	399
8.1. Суммирование рядов методом цепных дробей	399
8.2. Суммирование ряда Эйлера методом цепных дробей	407
8.3. Асимптотические цепные дроби	412
ГЛАВА 9. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ И ЦЕПНЫЕ ДРОБИ	418
9.1. О цепных дробях, представляющих $\ln(-1)$	418
9.2. Расходящиеся ряды, имеющие комплексные значения	430
9.3. О постоянной Эйлера	436
ГЛАВА 10. ФУНКЦИЯ ВЕЙЕРШТРАССА И ЦЕПНЫЕ ДРОБИ	451
10.1. Функция Вейерштрасса	451
10.2. Интервальные и предельные r/φ -характеристики функции Вейерштрасса	457
10.3. Алгоритм определения знака φ -характеристики	475
10.4. Замечание о предельной φ -характеристике функции Вейерштрасса	475
10.5. Значения r/φ -характеристик в зависимости от координаты x	477
10.6. Определение функции Вейерштрасса цепными дробями ...	480
10.7. Нахождение производной функции Вейерштрасса цепными дробями	489
10.8. Определение предела функции через непрерывные дроби ..	499

10.9. О некоторых особенностях представления функций и производных рядами	503
ГЛАВА 11. ОПЕРАЦИИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ, ПРЕДСТАВЛЕННЫМИ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ	505
11.1. О записи комплексных чисел цепными дробями	505
11.2. Примеры записи комплексных чисел цепными дробями ...	511
11.3. Суммирование комплексных чисел, представленных цепными дробями	533
11.4. Произведение комплексных чисел	551
11.5. Деление комплексных чисел	558
ГЛАВА 12. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ	566
12.1. Решение СЛАУ методом суммирования расходящихся рядов	568
12.2. Решение систем алгебраических уравнений различных классов	577
12.3. Решение СЛАУ с симметричной матрицей	587
12.4. Решение СЛАУ различной размерности	595
ГЛАВА 13. ИЗ ИСТОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ	609
13.1. Ветвящиеся непрерывные дроби	609
13.2. Выпускник рабфака	630
13.3. Доцент провинциального вуза	644
13.4. Математик из княжеского рода	647
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	651
ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ	665
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	668
ПРИЛОЖЕНИЕ	672