Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Кафедра общей математики

Элементы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления

Методические указания

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов специальности Телекоммуникации

Ярославль 2006

УДК 517.53/.55
ББК В 161.55
Э 45

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2006 года

Рецензент
кафедра общей математики Ярославского
государственного университета им. П.Г. Демидова

Составитель: **В.Ф. Чаплыгин**

Э 45 **Элементы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления** : метод. указания / Сост. В.Ф. Чаплыгин; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль : ЯрГУ, 2006. – 51 с.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности 550400 Телекоммуникации (дисциплина «Математический анализ», блок ЕН), очной формы обучения.

УДК 517.53/.55
ББК В 161.55

ŋqdqyeɣ bɆ dəqƎbɣзə d ɐɔɑɓɔɣ ɟqdqɣqɣè

Комплексные числа, действия над ними

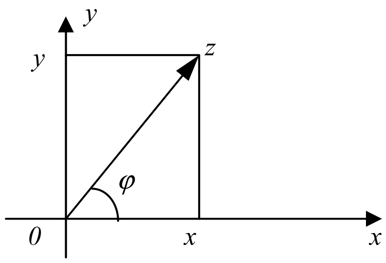
Комплексным числом называют число вида z=x+iy, где x и y вещественные числа, а i – число, обладающее тем свойством, что $i^2 = -1$. Отметим сразу, что если сохранять правила действий со степенями, то $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, а дальше по циклу $i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1$ и т.д. Число x называется реальной частью z и обозначается x = Re z, а y – мнимой его частью, y = Im z. Число x–iy называется сопряженным к z и обозначается $\bar{z}$, т.е. $\bar{z}$ = x–iy. Арифметические действия выполняются по следующим правилам. Если $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$, то их сумма, разность и произведение равны

$$z_1 \pm z^2 = (x^1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),\ z_1\cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2+iy_2) =$$
$$= (x_1x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Обратите внимание, что умножение выполняется по обычным правилам умножения двучлена на двучлен, учитывая равенство $i^2 = -1$. Заметим, что $z\cdot\bar{z} = x^2+y^2$. Если $z_2 \neq 0$ т.е. $x_2 \neq 0$ или $y_2 \neq 0$, то определена операция деления

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} = \frac{x_1x_2+y_1y_2+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2{}^2+y_2{}^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2} + i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}.$$



Проиллюстрируем последнюю операцию примером. Пусть $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 1 + 2i$.

Тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+3i}{1+2i} = \frac{(1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{7+i}{5} = \frac{7}{5} + \frac{1}{5}i$.

Комплексные числа можно интерпретировать геометрически как точки координатной плоскости. Числу z=x+iy ставится в соответствие точка плоскости с координатами (x, y). Расстояние от точки 0 до точки z равно $\sqrt{x^2+y^2}$ – эта величина называется модулем комплексного числа z и обозначается $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Угол φ, который образует вектор $\overrightarrow{0z}$ с осью 0x, называется аргументом комплексного числа z. Понятно, что аргумент определяется неоднозначно, а с точностью до слагаемого вида 2πn, n∈Z, и обозначается φ=arg z. Очевидно, что $x=|z|\cos\varphi$, $y=|z|\sin\varphi$, и тогда комплексное число может быть записано в виде $z=|z|\cos\varphi+i|z|\sin\varphi=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Последнее представление называется тригонометрической формой комплексного числа.

Так, для числа z=1+i модуль $|z|=\sqrt{2}$, arg z$=\frac{\pi}{4}$, его тригонометрическая форма $z=\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$.

Для z=i модуль $|z|=1$, arg z$=\frac{\pi}{2}$, $z=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$.

Для z=–1 модуль $|z|=1$, arg z=π, $z=\cos\pi+i\sin\pi=-1$.

Тригонометрическая форма удобна, в частности, для умножения и деления комплексных чисел. Если $z_1=|z_1|(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=|z_2|(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, то произведение чисел представляется как

$$z_1\cdot z_2=|z_1|\,|z_2|((\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+$$
$$+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_2\cos\varphi_1))=|z_1|\,|z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Отсюда следует, что для любого натурального числа n и любого комплексного числа $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ n-ая его степень равна $z^n=|z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$.

Частное двух комплексных чисел выражается, как

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{|z_2|(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$
$$=\frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)),\ \text{где}\ z_2\neq0.$$

И, наконец, рассмотрим еще одну форму комплексного числа z. Так как по формуле Эйлера $e^{i\varphi}= \cos\varphi + i\sin\varphi$, то

$$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)=|z|\ e^{i\varphi}.$$

Это экспоненциальная форма комплексного числа.

Очень важной операцией является извлечение корня. Пусть z – комплексное число. По определению $\sqrt[n]{z}$ – это такое число w, что $w^n = z$. Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, где $r = |z|$ и $\rho = |w|$, то, представив z в виде $z = r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k))$, получим равенство

$$\rho^n(\cos n\psi+i\sin n\psi) = r(\cos(\varphi+2\pi k)+i\sin(\varphi+2\pi k)),\ k \in Z.$$

Откуда получаем $\rho^n = r$, следовательно, $\rho=\sqrt[n]{r}$; $n\psi= \varphi+2\pi k$, откуда $\psi_k = \dfrac{\varphi}{n}+\dfrac{2\pi}{n}$k. Придавая значения $k = 0, 1, \dots, n-1$, получаем n различных значений аргумента ψ_k ($\psi_{n+1} = \psi_1 + 2\pi$ и т.д.) и, соответственно, n различных значений корня $wk=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, $k=0, 1, \dots, n-1$.

Если использовать экспоненциальную форму комплексного числа, то корень можно выразить как $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|e^{i(\varphi+2\pi k)}}$ = $\sqrt[n]{|z|}\ e^{i(\frac{\varphi+2\pi k}{n})}$. Приведем примеры. Решить уравнения:

а) $z^2+4z+8=0$, б) $z^2=1+i$, в) $z^3=1$,
г) $z^4+16=0$, д) $z^6-7z^3-8=0$, е) $z^2-3iz-2=0$.

Решения:

а) $D = 16 - 32 = -16$, $z_{1,2} = \dfrac{-4\pm\sqrt{-16}}{2} = -2 \pm 2i$.

б) $z=\sqrt{1+i} =\sqrt{\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right)} =$

$$=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2}\right).$$