МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Часть 2

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие для вузов

Ю.С. Радченко,
Т.А. Радченко

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2010

Содержание

Введение

В первой части учебного пособия рассматривались методы моделирования независимых случайных величин. В данной части учебного пособия дано изложение методов моделирования непрерывных и дискретных случайных процессов. В нем обобщен практический опыт

1.2. Выбор шага дискретизации процесса

При моделировании вместо непрерывной реализации процесса x(t) формируются его отсчеты $x(t_j)$. Погрешность замены процесса x(t) его отсчетами $x(t_j)$ определяется соотношением

$$\varepsilon = \max\left[<\left(x(t) - x(t_j) \right)^2 > \right]^{1/2} = \sqrt{2\left(1 - R\left(\Delta t/2\right)\right)}\,. \qquad (1.7)$$

Для любого дифференцируемого процесса, используя (1.5), можно записать:

$$\varepsilon = \frac{\Delta t}{2\sqrt{-R''(0)}} = \frac{\Delta t}{2\tau_k}\,. \qquad (1.8)$$

Для недифференцируемого процесса из (1.6) и (1.7) получаем:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Delta t}{\tau_k}}\,. \qquad (1.9)$$

Используем (1.8), (1.9) для оценки шага дискретизации Δt. Возьмем ε=0.05. Тогда $\Delta t = 0.1\tau_k$ – для дифферецируемого процесса, $\Delta t = \tau_k / 400$ – для недифференцируемого процесса. Практика моделирования показала, что вполне приемлема величина шага дискретизации для дифференцируемых процессов $\Delta t=(0.1\div0.2)\tau_k$, для недифференцируемых $\Delta t=(0.01\div0.02)\tau_k$.

ПРИМЕР 1.1. Пусть $R(\tau) = \exp(-(\alpha\tau)^2 / 2)$. Тогда $R''(0) = -\alpha^2$, $\tau_k = 1/\alpha$. В этом случае $\Delta t=(0.1\div0.2)\tau_k=(0.1\div0.2)/\alpha$.

Пусть $R(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|) \approx 1 - \alpha|\tau|$. Процесс с такой корреляционной функцией – недифференцируемый ($R''(0) = -\infty$). В этом случае $\tau_k = 1/\alpha$ и $\Delta t=(0.01\div0.02)\tau_k=(0.01\div0.02)/\alpha$.

1.3. Методы формирования реализаций

Все алгоритмы формирования реализаций случайных процессов могут быть отнесены к одному из методов моделирования:

- метод формирующего фильтра;
- метод ортогональных (канонических разложений);
- метод коррелированных векторов;
- метод условных распределений.

Идея ***метода формирующего фильтра*** состоит в пропускании белого шума через формирующий фильтр. При пропускании шума u(t) с функцией корреляции $K_u(\tau)$ и спектральной плотностью мощности $S_u(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_u(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau$ через фильтр с передаточной функцией $H(j\omega)$

процесс x(t) на выходе фильтра имеет спектральную плотность мощности

$$S_x(\omega) = S_u(\omega)\left|H(j\omega)\right|^2 . \qquad (1.10)$$

Здесь j=√-1. Если процесс u(t) считать «полосовым белым» шумом в полосе $\omega \in \left[-\omega_g, \omega_g\right]$ с уровнем S_0, то тогда $S_x(\omega) = S_0\left|H(j\omega)\right|^2$.

Метод формирующего фильтра является одним из самых универсальных методов, пригодных для генерации процессов с любой корреляционной функцией. Он позволяет формировать реализации x(t) произвольной длины. Его основной проблемой является нахождение передаточных функций H(p) и H(z), уменьшение методических погрешностей, связанных с цифровым представлением H(z). Так, например, корреляционные функции процессов x(t) и x(j) совпадают в соответствующие моменты времени, а их спектральные плотности мощности могут отличаться. Конечное число коэффициентов цифрового фильтра H(z) также влияет на соответствие статистических характеристик процессов x(t) и x(j).

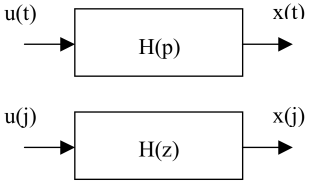

Рис. 1.2 Схема формирования коррелированного процесса

Здесь и далее используется обозначение $x(t_j) = x(j)$, $u(t_j) = u(j)$.

Известны два способа математического описания процесса аналоговой фильтрации «полосового белого» шума u(t):

1. Интеграл Дюамеля

$$x(t) = \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau , \qquad (1.11)$$

где h(τ) – импульсная реакция формирующего фильтра.

2. Дифференциальное уравнение

$$A_n \frac{d^n x}{dt^n} + \ldots A_1 \frac{dx}{dt} + A_0 x(t) = B_m \frac{d^m u}{dt^m} + \ldots B_1 \frac{du}{dt} + B_0 u(t) . \qquad (1.12)$$

В дискретном варианте этим способам описания фильтрации соответствуют:

1. Метод скользящего суммирования:

$$x(j)=\sum_{k=0}^{N} C_k u(j-k)\,. \tag{1.13}$$

2. Рекуррентный метод:

$$x(j)=\sum_{k=0}^{N} a_k u(j-k)+\sum_{m=1}^{M} b_m x\bigl(j-m\bigr)\bigr). \tag{1.14}$$

Корреляционная функция и спектральная плотность мощности определяются коэффициентами C_k, a_k, b_m:

$$R(i-j)=\sum_{k} C_k C_{i-j+k}\,. \tag{1.15}$$

Передаточная функция рекурсивного формирующего фильтра равна:

$$H(z)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}{1-\sum\limits_{m=1}^{M} b_m z^{-m}}\,. \tag{1.16}$$

Делая подстановку $z=\exp(j\omega\Delta t)$ в формулу (1.16) можно записать:

$$S_g(\omega)=S_0\left|H(\exp(j\omega\Delta t))\right|^2. \tag{1.17}$$

Идея ***метода ортогональных (канонических) разложений*** состоит в разложении процесса x(t) в ряд:

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(t)\,, \tag{1.18}$$

где α_k – случайные коэффициенты, $\{\varphi_k(t)\}$ - система базисных функций. Для практических целей удобно систему базисных функций $\{\varphi_k(t)\}$ выбирать ортогональной, а случайные коэффициенты α_k – некоррелированными. Такой способ весьма прост и особенно эффективен при моделировании полей. С его помощью легко моделировать нестационарные процессы. Однако при практической реализации этого алгоритма возникает вопрос о количестве слагаемых в ряде (1.18), выборе базисных функций. Кроме того, на практике длина реализации x(t) не может быть очень большой, так как требуемое число слагаемых в ряде (1.18) катастрофически возрастает с увеличением длины реализации. Вариантами этого метода являются разложение Карунена-Лоэва, каноническое разложение Пугачева, разложение в ряд Фурье (дискретное преобразование Фурье – ДПФ).

Метод коррелированных векторов состоит в преобразовании вектора столбца некоррелированных случайных чисел $U=\left(u_1,u_2,\ldots u_N\right)$ в

ђqdqуэҰ bɆ dэdɆbҰзә d ɕэαbэу Ɉqdd Ұqуè