

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

И. В. Михайлова, Е. А. Логинова

ДИКТАТУРА, ДЕМОКРАТИЯ, РЕВОЛЮЦИЯ

Учебно-методическое пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2018

В некотором государстве общество разделено на два класса: богатых и бедных. Исторически, в данной стране существовал авторитарный режим: все ключевые решения принимает диктатор и небольшая кучка богачей, которые его поддерживают. Не удивительно, что в этой стране богатые не платили налоги, бедные всегда были возмущены этим фактом. За последний год возмущение достигло предела, и над обществом нависла угроза революции – насильственного свержения власти и национализации всей собственности богатого класса.

Богатые понимают, что должны идти на уступки. У них есть два варианта. При первом варианте проходит демократизация общества. Бедные получают избирательные права (и юридические, и фактические), и богатые навсегда теряют контроль над экономической политикой (хотя, в отличие от революционного сценария, они сохраняют большую часть своей собственности). При втором варианте богатые обещают бедным более справедливое распределение доходов, но сохраняют политический контроль и возможность самим устанавливать ставку налогообложения в будущем (в том числе и через несколько лет, когда угроза революции пройдет). Какой вариант выберут богатые? Станут ли бедные устраивать революцию?

Представим взаимодействие богатых и бедных в виде динамической игры. Построим дерево этой игры (рис. 1). Первый ход делают богатые, которые решают, стоит ли вводить демократию (D), или нет (N). На следующем ходе устанавливается ставка налогообложения $\tau \in [0;1]$. При демократии налоги определяют бедные, так как их большинство. При авторитарном строе налоги определяют богатые. После того, как ставка налогообложения установлена, бедные решают, устроить ли революцию (R), или нет (NR). Если на первом ходе не была введена демократия, и если на третьем ходе не произошло революции, то богатые с вероятностью q снова устанавливают

$V_2(NR, \tau)$ по τ , получим $V_2(NR, \tau) = -\frac{\bar{y}}{2}\tau^2 + (\bar{y} - y_2)\tau + y_2$. График этой функции представляет собой параболу с ветвями, направленными вниз, следовательно, максимальное значение достигается в вершине параболы с абсциссой вершины: $\tau_{\max} = \tau_{\varepsilon} = \frac{\bar{y} - y_2}{y} > 0$. Таким образом, оптимальная для

бедных ставка налогообложения $\tau_1^* = \frac{\bar{y} - y_2}{y}$. Подставив полученное значение τ_1^* в целевые функции народа и элиты, получим:

$$V_1(NR, \tau_1^*) = -\frac{\bar{y}}{2}\left(\frac{\bar{y} - y_2}{y}\right)^2 + (\bar{y} - y_1)\frac{\bar{y} - y_2}{y} + y_1 = \frac{1}{2y}(2y_1y_2 + \bar{y}^2 - y_2^2);$$

$$V_2(NR, \tau_1^*) = -\frac{\bar{y}}{2}\left(\frac{\bar{y} - y_2}{y}\right)^2 + (\bar{y} - y_2)\frac{\bar{y} - y_2}{y} + y_2 = \frac{1}{2y}(\bar{y}^2 + y_2^2).$$

Рассмотрим, каким будет решение бедных относительно революции при демократическом режиме. Революция не произойдет (NR), если $V_2(R) \leq V_2(NR, \tau_1^*)$. Подставим выражения для $V_2(R)$ и $V_2(NR, \tau_1^*)$:

$$\frac{\mu\bar{y}}{\lambda} \leq \frac{1}{2y}(\bar{y}^2 + y_2^2); \mu \leq \frac{\lambda}{2\bar{y}^2}(\bar{y}^2 + y_2^2).$$

$$\text{Обозначим } \bar{\mu} = \frac{\lambda}{2\bar{y}^2}(\bar{y}^2 + y_2^2).$$

Таким образом, если $\mu \leq \bar{\mu}$, то революции не произойдет (NR), если $\mu > \bar{\mu}$, то революция произойдет (R).

Рассмотрим теперь, каким будет решение бедных при недемократическом режиме (N). Революция не произойдет (NR), если

$$V_2(R) \leq (1 - q)V_2(NR, \tau_2) + qV_2(NR, \tau_3^*).$$

Заметим, что это условие зависит от τ_2 - произвольной ставки налогообложения, предложенной богатыми на предыдущем этапе игры, и τ_3^* - ставки налогообложения, предлагаемой богатыми на следующем этапе игры.

Подставим значения $V_2(R)$, $V_2(NR, \tau_2)$, $V_2(NR, \tau_3^*)$, получим

$$\frac{\mu \bar{y}}{\lambda} \leq (1-q)((1-\tau_2)y_2 + (\tau_2 - \frac{\tau_2^2}{2})\bar{y}) + qy_2.$$

После преобразования неравенство примет вид

$$\frac{\mu \bar{y}}{\lambda} \leq -(1-q)\frac{\bar{y}}{2}\tau_2^2 + (1-q)(\bar{y} - y_2)\tau_2 + y_2.$$

График правой части выражения, представляет собой параболу с ветвями, направленными вниз, и вершиной $\tau_e = \frac{\bar{y} - y_2}{\bar{y}} > 0$, причем τ_e расположено ближе к точке $\tau = 1$, если y_2 достаточно мало. График левой части выражения представляет собой прямую $\frac{\mu \bar{y}}{\lambda} = const > 0$.

Возможны три варианта взаимного расположения графиков и, соответственно, три варианта развития событий.

1) Если $\mu \leq \mu_0 = \frac{\lambda y_2}{y}$, то революция не произойдет (NR) при любом значе-

нии τ_2 . Выгоднее выбрать ставку налогообложения $\tau_2^* = 0$.

2) Если $\mu_0 < \mu \leq \mu_1 = \frac{\lambda y_2}{y} + \lambda(1-q)\frac{(\bar{y} - y_2)^2}{2\bar{y}^2}$, то революция не произойдет

$$(NR), \tau_2^* \leq \tau_1^* \text{ и } \tau_2^* = 1 - \frac{y_2}{\bar{y}} - \frac{1}{\sqrt{1-q}} \cdot \sqrt{(1-q - \frac{2\mu}{\lambda}) + \left(\frac{y_2}{\bar{y}}\right)^2 (1-q) + 2\frac{y_2}{\bar{y}}q}.$$

3) Если $\mu > \mu_1$, то произойдет революция (R).

Замечание. $\mu_0 < \mu_1 < \bar{\mu}$

Для удобства изобразим все рассмотренные варианты на оси μ (рис. 2) и в виде таблицы.



Рис. 2. Выбор бедных и богатых при различных значениях μ

Таблица 1. Выбор бедных и богатых при различных значениях μ

μ	$[0; \mu_0]$	$(\mu_0; \mu_1]$	$(\mu_1; \bar{\mu}]$	$(\bar{\mu}; 1]$
Выбор богатых	N	N	D	D или N
Выбор бедных	NR	NR	NR	R
τ	$\tau_2^* = \tau_3^* = 0$	$\tau_2^* = 1 - \frac{y_2}{\bar{y}} - \frac{1}{\sqrt{1-q}} \cdot \sqrt{(1-q - \frac{2\mu}{\lambda}) + (\frac{y_2}{\bar{y}})^2} (1-q) + 2\frac{y_2}{\bar{y}} q$	$\tau_1^* = \frac{\bar{y} - y_2}{\bar{y}}$	-
Выигрыш богатых V_1	y_1	$V_1 = (1-q)V_1(NR, \tau_2^*) + qy_1$	$V_1(NR, \tau_1^*) = \frac{1}{2y} (2y_1y_2 + y - y_2^2);$	0
Выигрыш бедных V_2	y_2	$V_2 = (1-q)V_2(NR, \tau_2^*) + qy_2$	$V_2(NR, \tau_1^*) = \frac{1}{2y} (\bar{y}^2 + y_2^2)$	$\frac{\mu \bar{y}}{\lambda}$

Пример 1.

В некотором государстве доля бедных (λ) составляет 90% населения, доход богатого гражданина (y_1) 5 млн. денежных единиц, доход бедного гражданина (y_2) 5 тыс. денежных единиц. В случае революции ($1 - \mu$) 80% совокупного дохода уничтожается. $q = 0,7$ - вероятность установления ставки налогообложения τ_3 . Определить какой режим установится в государстве (демократия D или отсутствие демократии N), произойдет революция (R) или нет (NR), какая будет ставка налогообложения (τ), а также выигрыш богатых (V_1) и выигрыш бедных (V_2).

Решение.

Найдем средний доход

$$\bar{y} = \lambda y_2 + (1 - \lambda) y_1 = 0,9 \cdot 5000 + (1 - 0,9) \cdot 5000000 = 4500 + 500000 = 504500.$$

Найдем $\mu = 1 - 0,8 = 0,2$.

Посчитаем

$$\bar{\mu} = \frac{\lambda}{2\bar{y}^2} (\bar{y}^2 + y_2^2) = \frac{0,9}{2 \cdot (504500)^2} ((504500)^2 + (5000)^2) = \frac{0,9 \cdot 25454525}{50904050} \approx 0,45.$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\lambda y_2}{\bar{y}} + \lambda(1 - q) \frac{(\bar{y} - y_2)^2}{2\bar{y}^2} = \frac{0,9 \cdot 5000}{504500} + 0,9 \cdot 0,3 \cdot \frac{(504500 - 5000)^2}{2 \cdot (504500)^2} = \\ &= 0,0089 + 0,1323 \approx 0,14. \end{aligned}$$

$$\mu_0 = \frac{\lambda \cdot y_2}{\bar{y}} = \frac{0,9 \cdot 5000}{504500} \approx 0,001.$$

Проверим выполнение условия $\mu_0 < \mu_1 < \bar{\mu}$: $0,001 < 0,14 < 0,45$ - условие выполнено.

В нашем случае $\mu \in (\mu_1, \bar{\mu}]$, так как $0,2 \in (0,14; 0,45]$.

Таким образом, чтобы избежать революции, на первом шаге богатые выберут демократию (D).

Найдем $\tau_1^*, V_1(NR, \tau_1^*), V_2(NR, \tau_1^*)$.

$$\tau_1^* = \frac{\bar{y} - y_2}{\bar{y}} = \frac{504500 - 5000}{504500} \approx 0,99.$$

$$V_1(NR, \tau_1^*) = \frac{1}{2\bar{y}}(2y_1y_2 + \bar{y}^2 - y_2^2) = \frac{1}{2 \cdot 504500}(2 \cdot 5 \cdot 10^9 + (504500)^2 - 5 \cdot 10^6) = 301779,2.$$

$$V_2(NR, \tau_1^*) = \frac{1}{2\bar{y}}(\bar{y}^2 + y_2^2) = \frac{1}{2 \cdot 504500}(504500^2 - 5000^2) \approx 252274,5.$$

Пример 2.

В некотором государстве доля бедных (λ) составляет 90% населения, доход богатого гражданина (y_1) 60 млн. денежных единиц, доход бедного гражданина (y_2) 6 тыс. денежных единиц. В случае революции ($1 - \mu$) 90% совокупного дохода уничтожается. $q = 0,5$ - вероятность установления ставки налогообложения τ_3 . Определить какой режим установится в государстве (демократия D или отсутствие демократии N), произойдет революция (R) или нет (NR), какая будет ставка налогообложения (τ), а также выигрыш богатых (V_1) и выигрыш бедных (V_2).

Решение.

Найдем средний доход

$$\bar{y} = \lambda y_2 + (1 - \lambda)y_1 = 0,9 \cdot 6000 + (1 - 0,9) \cdot 60000000 = 5400 + 60000000 = 6005400.$$