

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ  
И ОБРАЗОВАНИЯ



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«**ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
АГРОИНЖЕНЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**»

Кафедра сопротивления материалов

Утверждаю.  
Проректор по УР  
А.Патрушев

**РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ  
УПРУГИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ**

**в программных продуктах  
SCAD и MathCAD**

Методические указания

Челябинск 2008

Методические указания предназначены для студентов 2-го курса специальности **190206 «Сельскохозяйственные машины и оборудование»** направления **190200** – «Транспортные машины и транспортно-технологические комплексы» изучающих курс «Сопротивление материалов».

На примере программ **SCAD** и **MathCAD** реализуется идея использования уже на младших курсах на факультетах сельскохозяйственного машиностроения современных проектно-вычислительных комплексов, применяемых в инженерной практике для расчетов и проектирования строительных и машиностроительных конструкций. Приведена инструкция по использованию программ **SCAD** и **MathCAD** при решении статически неопределимых задач строительной механики стержневых систем.

Методические указания могут быть полезны студентам всех курсов специальности 190206 «Сельскохозяйственные машины и оборудование», аспирантам и инженерно-техническим работникам АПК.

Составитель

**Жилкин В.А.** - докт.техн.наук, профессор (ЧГАУ)

Рецензенты

*Сапожников СБ.* - докт. техн. наук, проф. (ЮУрГУ)

*Кромский Е.И.* - канд. техн. наук, доцент (Уральский филиал МАДИ)

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЧГАУ

© ФГОУ ВПО "Челябинский государственный агроинженерный университет", 2007.

# РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

## 1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ<sup>1</sup>

По кинематическим признакам стержневые системы подразделяются на следующие группы:

1. *Геометрически изменяемые системы (механизмы)*. Как правило, такие системы не могут воспринимать силовую нагрузку произвольного направления. Перемещения в таких системах возможны без изменения начальной формы стержней (рис.1).

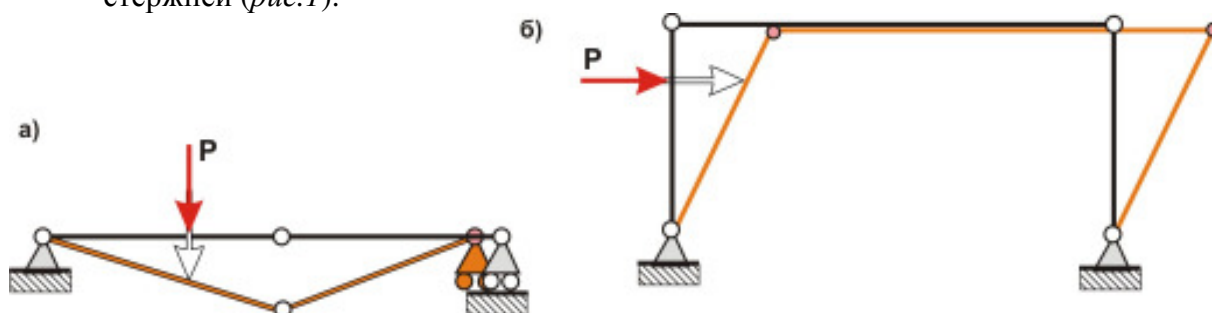


Рис.1

2. *Геометрически неизменяемые системы*. Перемещения в таких системах происходят лишь вследствие деформирования материала, из которого изготовлены элементы системы. Именно такие системы выступают в качестве расчетных схем при проведении прочностных расчетов реальных конструкций (рис.2).

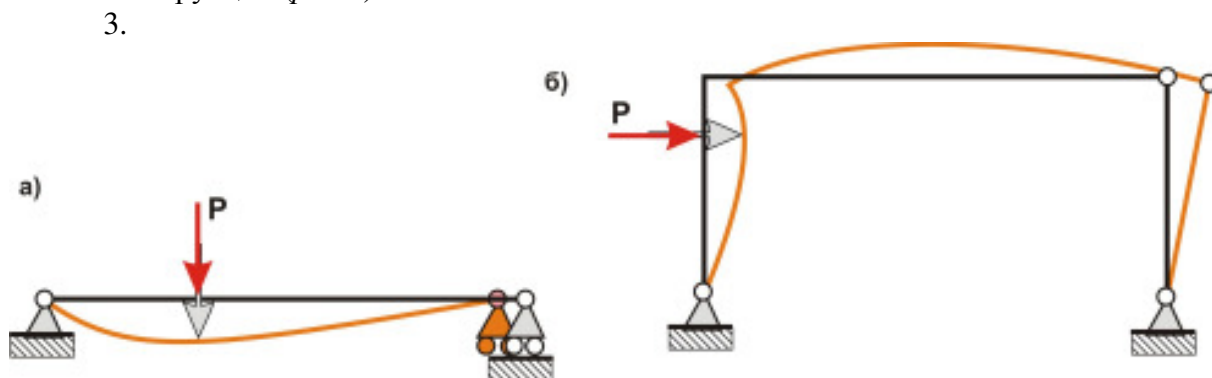


Рис.2

<sup>1</sup> Прокофьев И.П. Теория сооружений. Часть 2. – Л.: ОНТИ, 1932. – 449 с.; Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. – М.: Высш. школа, 1989. – 624 с.; Тимошенко С.П. Механика материалов. – М.: Мир, 1976. – 670 с.; Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.; Окопный Ю.А., Радин В.П., Чирков В.П. Механика материалов и конструкций. М.: Машиностроение, 2002. – 436 с.; Жилкин В.А. Расчеты на прочность и жесткость элементов сельскохозяйственных машин. Челябинск, ЧГАУ, 2005. – 435 с.; Жилкин В.А. Элементы прикладной и строительной механики сельхозмашин. Челябинск, ЧГАУ, 2007. – 350 с.; Сборник задач по сопротивлению материалов с теорией и примерами /Под ред. А.Г. Горшкова, Д.В. Тарлаковского. – М.: Физматлит. 2003. – 632 с.

3. *Мгновенно изменяемые системы.* Эти системы ведут себя как механизмы при бесконечно малых перемещениях. Однако при конечных перемещениях их поведение аналогично геометрически неизменяемым системам. Если направления опорных стержней пересекаются в одной точке, то в этом случае допускается бесконечно малый поворот упругой системы вокруг этой точки. На рис.3 приведены примеры мгновенно изменяемых систем, допускающих бесконечно малые перемещения, совместимые со связями.

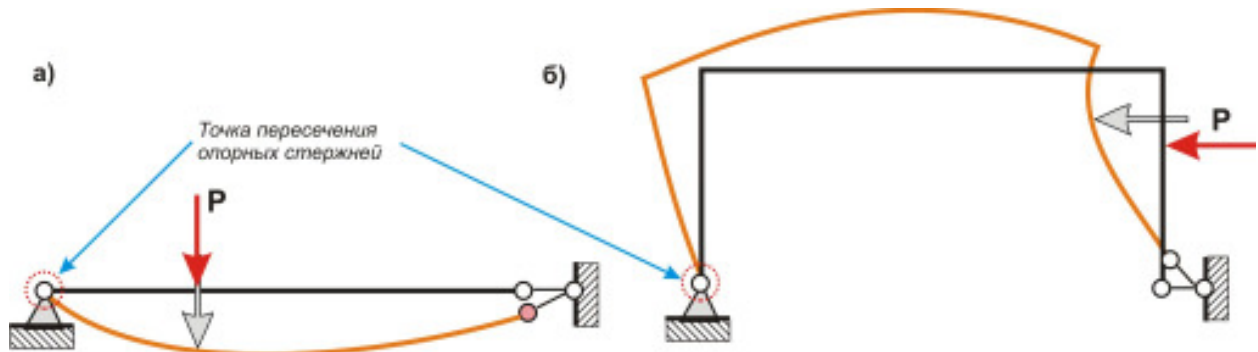


Рис.3

По статическим признакам стержневые системы принято делить на две группы:

1. *Статически определимые системы.* Все реакции опор и все усилия в элементах этих систем могут быть определены только из уравнений равновесия. Удаление хотя бы одной связи в статически определимой системе превращает ее в геометрически изменяемую.
2. *Статически неопределимые системы.* Все реакции и/или усилия в таких системах не могут быть определены только из уравнений статики.

В статически неопределимых системах число внешних или внутренних связей, наложенных на систему, превышает минимальное число связей, необходимых для обеспечения геометрической неизменяемости упругой системы. В этом случае говорят, что на систему наложены так называемые *лишние связи*.

Термин *лишние связи* является условным и отражает лишь тот факт, что число связей в системе превышает число независимых уравнений равновесия, которые могут быть составлены для определения всех усилий в системе. Наличие таких связей в большинстве несущих конструкций обусловлено необходимостью обеспечения требуемых условий прочности и жесткости.

Усилия, возникающие в лишних связях, называют *лишними неизвестными*. Разность между числом неизвестных усилий в системе и числом независимых уравнений статики, которые можно составить для их определения, называется *степенью статической неопределимости  $n$* . Степень статической неопределимости совпадает с числом лишних связей или числом лишних неизвестных. Таким образом, чтобы определить степень статической неопределимости системы  $n$ , нужно найти число связей, которые необходимо отбросить, чтобы получить **статически определимую геометрически неизменяемую систему**.

Так, например: балка, лежащая на трех опорах, из которых одна неподвижна (рис.4, а), имеет четыре связи в опорных закреплениях и, следовательно, внешне один раз статически неопределима; рама, приведенная на рис. 4, б, опирающаяся на две опоры, из которых одна подвижная, статически определима относительно опорных закреплений, но имеет три лишних связи в замкнутом контуре (рис.5), которые невозможно определить из уравнений статики, т.е. рама три раза статически неопределима внутренним образом.

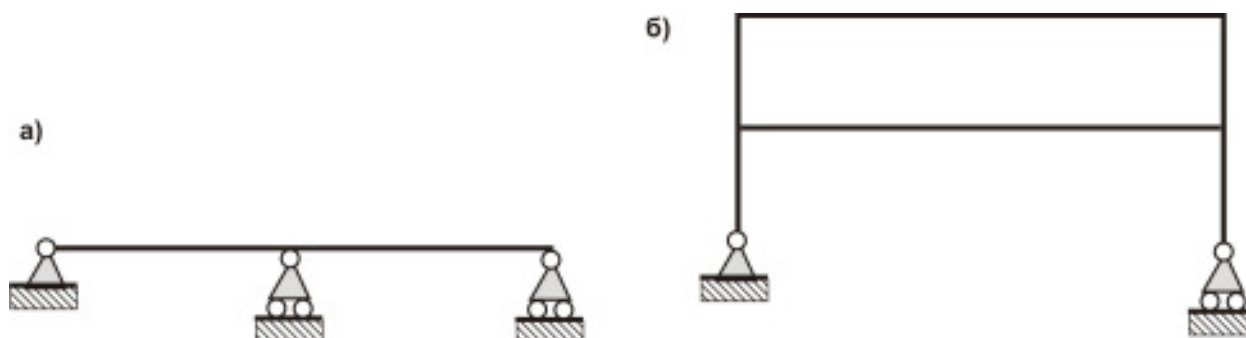


Рис.4

Замкнутый контур, не содержащий шарниров, в плоской системе трижды статически неопределим. Чтобы превратить такой контур в статически определимый нужно сделать сечение одного из его элементов (рис.5, а). При этом устраняются три связи на взаимные линейные и угловое перемещения. Реакциями этих связей являются продольная  $N$  и поперечная  $Q$  силы и изгибающий момент  $M$ , действующие в этом сечении.

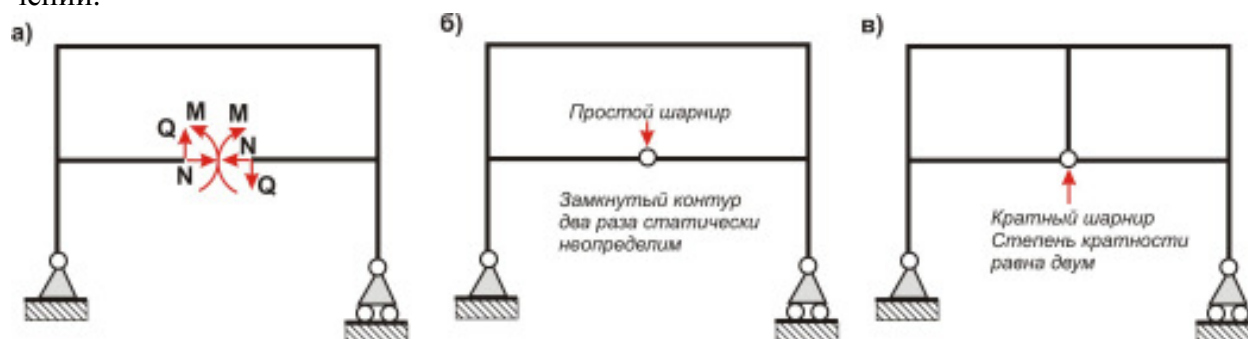


Рис.5

Включение в состав плоской стержневой системы шарнира, соединяющего два стержня, уменьшает степень статической неопределимости на единицу. Такие шарниры называются *простыми* (рис.5, б). Шарнир, с помощью которого соединяются три стержня, снижает степень статической неопределимости на два (рис.5, в). И вообще, если в некотором шарнире соединяются  $m$  стержней, то снижение статической неопределимости будет равно  $m - 1$ . В этом случае говорят, что шарнир имеет кратность  $m - 1$ .

Если стержневая система содержит  $k$  замкнутых контуров и  $s$  простых шарниров, вычисленных с учетом их кратности, то степень статической неопределимости  $n$  плоской стержневой системы может быть определена по формуле

$$n = 3k - s. \quad (1)$$

Так как статически неопределимая система не может быть рассчитана путем использования только уравнений статики, то для её расчета приходится составлять дополнительные уравнения, связывающие величины лишних связей с нагрузкой, действующей на систему, причем для установления этой зависимости приходится *заданную систему* приводить к некоторой другой *расчетной системе*, которая хорошо изучена по своей работе в смысле определения в ней внутренних усилий и деформаций.

Известны три способа расчета статически неопределимых систем:

- **метод сил;**
- **метод перемещений;**
- **смешанный метод.**

Под *методом сил* подразумевается способ, когда за основные неизвестные, подлежащие определению, принимаются силы и моменты. Заданная статически неопределимая система приводится к одному из видов *статически определимой системы*, причем лишние связи в заданной системе заменяются в *расчетной системе* силами или

моментами. Так, например, если требуется рассчитать балку (заданную систему), заделанную одним концом и свободно лежащую на другом (рис.6, а), представляющую собой систему однажды статически неопределимую, то для расчета ее по методу сил за расчетную систему можно принять статически определимую балку (основную систему), лежащую на двух опорах, и к заданной нагрузке (рис.6, б) добавить опорный момент  $M_B$  (рис.6, в), который должен заменить собой условие лишнего закрепления на опоре  $B$  и заставить эквивалентную систему работать так же, как заданная (рис.6, г). Так как в заданной системе угол поворота  $\varphi_B$  на опоре  $B$  равен нулю, то в эквивалентной системе, работающей по условию так же, как заданная, тот же угол должен равняться нулю, но в ней этот угол поворота является результатом действия нагрузки  $P$  и неизвестного момента  $M_B$  (рис.6, г), а потому требуемое условие может быть выражено следующим уравнением:

$$\varphi_{BP} + \varphi_{BM} = \varphi_M = 0, \quad (2)$$

в котором величина  $\varphi_{BM}$  включает в себе одно лишнее неизвестное  $M_B$ . Следовательно, решение задачи по раскрытию статической неопределимости балки сводится к тому, что нужно уметь в двухопорной статически определимой системе написать величины  $\varphi_{BP}$  и  $\varphi_{BM}$ .

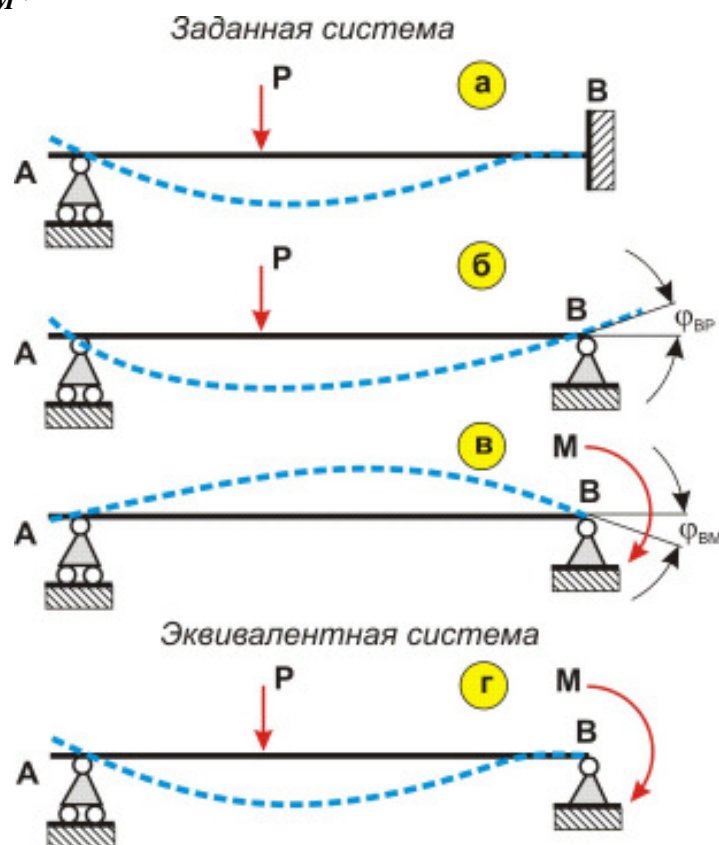


Рис.6

В отличие от метода сил, при применении *метода перемещений* заданная система приводится к расчетной не путем замены лишних неизвестных силами или моментами, а, наоборот, *введением нового закрепления, приводящего заданную систему к новой статически неопределимой системе*, но хорошо изученной по своей работе в смысле определения внутренних усилий и деформаций. Например, если принять, что нами хорошо изучен расчет балок, заделанных двумя концами, то можно рассматривавшуюся выше балку с одним заделанным концом и свободно лежащую на другом

(рис.7, а) привести к виду балки, заделанной двумя концами (рис.7, б), с приложением к ней лишней связи опорного момента.

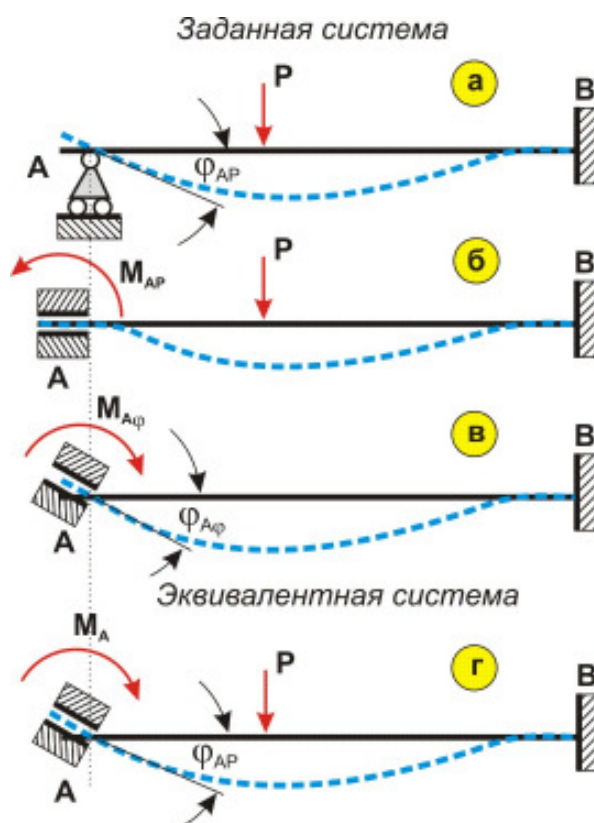


Рис.7

Знание работы этой системы приводит к тому, что можно написать для нее величину опорного момента  $M_{AP}$  от заданной нагрузки; но условие работы принятой эквивалентной системы не будет соответствовать заданной, так как в последней имеет место угол поворота  $\varphi_{AP}$  (рис.7, а) на этой опоре, а потому, чтобы заставить принятую эквивалентную систему работать так же, как заданную, надо повернуть введенную заделку на опоре А на величину угла  $\varphi_{AP}$ , что равноценно введению опорного момента  $M_{A\varphi}$  (рис.7, в). По условию же работы заданной системы момент на этой опоре  $M_A = 0$ , а потому в эквивалентной системе, находящейся под действием нагрузки  $P$  и угла поворота  $\varphi_A$  (рис.7, г), суммарный момент должен быть равен нулю:

$$M_{AP} + M_{A\varphi} = M_A = 0. \quad (3)$$

Это уравнение, в которое в выражение  $M_{A\varphi}$  в качестве одного неизвестного входит угол  $\varphi_{AP}$ , является дополнительным условием, необходимым для расчета заданной статически неопределимой системы, и следовательно расчет ее становится возможным при умении написать величины моментов, входящих в уравнение (3).

Рассмотренный нами в качестве пояснения метода простейший случай статически неопределимой балки не дает представления о преимуществе расчета метода перемещений по сравнению с методом сил. При применении же этого метода к более сложным конструкциям этот метод может вносить значительные упрощения. Например, система, показанная на рис.8, а, является шесть раз статически неопределимой относительно опорных закреплений (рис.8, б), а потому расчет ее по методу сил потребует составления и совместного решения шести дополнительных уравнений. При применении же для её расчета метода перемещений потребуется определение только одного